



Gonçalo Martins Gonçalves

Licenciado em Ciências da Engenharia Mecânica

Análise dos problemas de não-linearidade e singularidade em otimização topológica de estruturas e materiais com critérios de tensão

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Doutor Pedro Samuel Gonçalves Coelho

Prof. Auxiliar da Faculdade de Ciências e Tecnologia da
Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof.^a Doutora Marta Isabel Pimenta Verdete da Silva Carvalho

Arguentes: Prof. Doutor João Mário Burguete Botelho Cardoso

Vogais: Prof. Doutor Pedro Samuel Gonçalves Coelho



FACULDADE DE
CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Março, 2017

Copyright

Análise dos problemas de não-linearidade e singularidade em otimização topológica de estruturas e materiais com critérios de tensão

Copyright ©Gonçalo Martins Gonçalves, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objetivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, em primeiro lugar, ao meu orientador Doutor Pedro Coelho, pela sua orientação, dedicação e disponibilidade durante todo o processo de realização desta dissertação. Estou muito grato por todo o apoio e conhecimentos transmitidos, pelo voto de confiança e as palavras de incentivo no decorrer deste trabalho.

Ao Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial (DEMI) por disponibilizar as instalações e equipamentos indispensáveis para o desenvolvimento deste trabalho.

Quero também agradecer aos meus pais pelo apoio incessante e paciência ao longo desta jornada académica e por todo o seu apoio financeiro que tornaram todo o meu percurso possível. Agradeço também ao meu irmão, que sempre que possível estava disponível para me ouvir e aconselhar e acreditar sempre em mim. Ao meu círculo familiar dedico este trabalho.

Agradeço também à minha namorada, Beatriz, por todo o apoio incondicional e por ter sempre acreditado nas minhas capacidades.

Por fim agradeço a todos os meus amigos, em especial aqueles com quem tive o privilégio de partilhar este percurso.

Resumo

Esta dissertação aborda a análise dos problemas de não-linearidade e singularidade em otimização topológica com critérios de tensão, sendo o seu foco principal um estudo de convergência de malha de elementos finitos para analisar o comportamento da tensão em geometrias geradas por otimização topológica com constrangimento de volume.

O modelo material utilizado neste trabalho é um compósito de microestrutura periódica composto por duas fases, sólido e vazio (material poroso), e representa-se por uma célula de base unitária.

A aplicação de constrangimentos de tensão a problemas de otimização topológica é estudada nesta dissertação. Identificam-se as principais dificuldades associadas, o problema da singularidade, a natureza local dos constrangimentos e a não-linearidade da função da tensão e são estudados e aplicados os métodos de relaxamento da tensão ε -relaxation e qp -approach ao problema de uma estrutura reticula de três barras.

No estudo de convergência de malha de EF realizado são estudados dois tipos de geometrias, em primeiro lugar geometrias pré-definidas e por último, geometrias obtidas por otimização topológica com constrangimentos de volume. Em ambos os casos as geometrias são estudadas para as discretizações de 8×8 , 16×16 , 32×32 , 64×64 e 128×128 . O estudo é realizado recorrendo a métricas globais, a energia de deformação e a tensão equivalente máxima, e métricas locais, tensão lida nos nós para a análise e nos elementos para a otimização. Para cada um desses parâmetros é verificada a convergência. Posteriormente são comparados os resultados das geometrias pré-definidas com as geometrias otimizadas. É realizado um estudo acerca do melhor compromisso entra a precisão dos resultados e o custo computacional de otimização.

Os resultados obtidos mostram convergência tanto da tensão equivalente máxima como da energia de deformação para as geometrias obtidas por otimização topológica.

Palavras-chave: Tensão, Otimização, Topologia, Compósitos, Microestruturas, Singularidade.

Abstract

This dissertation has as its main goal the analysis of the non-linearity and singularity phenomena of stress criteria in topology optimization of structures and materials, being its main focus an analysis of finite element mesh convergence to assess stress behavior throughout geometries obtained from topology optimization.

The material model used here is a porous material with two phases of periodic microstructure, solid and void, and it is represented by a unit-cell (representative microstructure).

Stress constraints in topology optimization problems are studied in this work. The main difficulties related to the implementation of stress constraints are identified as being, the singularity problem, the local nature of stress constraints and the non-linearity associated with stress. Stress relaxation methods as ε -relaxation and qp -approach are presented and applied to a three bar truss problem.

The finite element mesh convergence analysis carried out in this work addresses two different types of geometry, the first is a pre-defined geometry and the latter is a geometry obtained by topology optimization. In both cases the analysis is performed with five different discretizations, 8×8 , 16×16 , 32×32 , 64×64 e 128×128 . In order to study mesh convergence global and local metrics had to be chosen. Strain energy and the maximum equivalent stress were chosen as global metrics, stress at nodes was chosen for the pre-defined geometry as a local metric and stress at elements for the optimized geometry. Convergence was verified for each chosen metric. Subsequently, the best compromise was found between the precision of results and the computational cost of the optimization.

The results obtained show convergence for the maximum equivalent stress and also for the strain energy in respect to the geometries obtained by topology optimization.

Keywords: Stress, Optimization, Topology, Composites, Microstructures, Singularity.

Índice

Copyright	iii
Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	ix
Índice de Tabelas	xv
Índice de Figuras	xix
Simbologia e notações	xxv
1 Introdução	1
1.1 Motivação	3
1.2 Objetivos da dissertação	5
1.3 Estrutura da dissertação	6
2 Otimização topológica com critérios de tensão	9
2.1 Otimização estrutural	9
2.2 Constrangimentos de tensão	12
2.2.1 ε -relaxation	14
2.2.2 qp-approach	17
3 Análise do campo de tensão	21
3.1 Convergência no método dos elementos finitos	21
3.1.1 Critérios de convergência no MEF	21
3.1.2 Singularidades na malha de elementos finitos	22
3.1.3 Princípio de St. Venant's	22
3.1.4 Concentração de tensões	23
3.1.5 Procedimento para verificar convergência	23
3.1.6 Métricas para o estudo da convergência	24
3.1.7 Técnicas de discretização da malha de elementos finitos	24

3.1.8	<i>Erros que afetam os resultados da solução de elementos finitos</i>	25
3.2	Modelo material	26
3.3	Estudo de convergência de malha	27
3.4	Problema de otimização	31
3.4.1	<i>Análise da tensão pela homogeneização</i>	32
3.4.2	<i>Filtro de densidades</i>	32
4	Fenómeno da singularidade	33
4.1	Modelo geométrico	35
4.2	Modelo numérico	36
4.2.1	<i>Pré-processamento</i>	36
4.2.2	<i>Solução</i>	38
4.2.3	<i>Pós-processamento</i>	38
4.3	1º Caso de estudo	39
4.3.1	<i>Tensão nos elementos</i>	40
4.3.2	<i>Formulação do problema de otimização</i>	40
4.3.3	<i>Projeto ótimo</i>	42
4.3.4	<i>Aplicação do ε-relaxation</i>	44
4.4	2º Caso de estudo	46
4.4.1	<i>Tensão nos elementos</i>	47
4.4.2	<i>Formulação do problema de otimização</i>	47
4.4.3	<i>Projeto ótimo</i>	50
4.4.4	<i>Aplicação do ε-relaxation</i>	51
4.4.5	<i>Aplicação do qp-approach</i>	53
4.5	Comparação de resultados ótimos com e sem relaxamento	54
4.5.1	<i>Comparação dos resultados do 1º caso de estudo</i>	55
4.5.2	<i>Comparação dos resultados do 2º caso de estudo</i>	55

4.6	Comparação entre os métodos de relaxamento	56
5	Estudo de convergência de malha	59
5.1	Análise de geometrias pré-definidas	59
5.1.1	Caso hidrostático – Furo quadrado.....	59
5.1.2	Caso hidrostático – Furo circular com fração volúmica de 50%.....	62
5.1.3	Caso hidrostático – Furo circular com fração volúmica de 80%.....	65
5.1.4	Caso hidrostático – Furo circular com malha não-quadrangular e fração volúmica de 50%	69
5.1.5	Caso hidrostático – Furo circular com malha não-quadrangular e fração volúmica de 80%	72
5.1.6	Caso corte 1 – Furo quadrado.....	75
5.1.7	Caso corte 2 – Furo quadrado com rotação de 45°em malha não-quadrangular	78
5.2	Otimização topológica de geometrias com constrangimento de volume.....	81
5.2.1	Caso hidrostático com constrangimento de volume de 50% e filtro ativo	83
5.2.2	Caso hidrostático com constrangimento de volume de 50% sem filtro ativo.....	85
5.2.3	Caso hidrostático com constrangimento de volume de 80% e filtro ativo	88
5.2.4	Caso hidrostático com constrangimento de volume de 80% sem filtro ativo.....	90
5.2.5	Caso corte 1 com constrangimento de volume de 75% com filtro ativo	92
5.2.6	Caso corte 1 com constrangimento de volume de 75% sem filtro ativo.....	94
5.2.7	Caso corte 2 com constrangimento de volume de 50% com filtro ativo	97
5.2.8	Caso corte 2 com constrangimento de volume de 50% sem filtro ativo.....	99
5.3	Estudo comparativo da convergência	101
5.4	Compromisso entre precisão e custo computacional.....	103
6	Conclusões e desenvolvimentos futuros.....	107
	Referências bibliográficas.....	111
	Anexos	117
	Anexos I.....	119

Anexo II	127
----------------	-----

Índice de Tabelas

CAPÍTULO 2

Tabela 2.1: Síntese da literatura sobre otimização topológica com constrangimentos de tensão utilizando o método ε -relaxation.....	17
--	----

Tabela 2.2: Síntese de formulações do método de relaxamento qp -approach proposto por alguns autores.	19
---	----

CAPÍTULO 3

Tabela 3.1: Carregamentos aplicados a cada geometria analisada e otimizada no estudo de convergência de malha das geometrias.....	28
--	----

CAPÍTULO 4

Tabela 4.1: Quadro resumo das publicações onde foram aplicados os métodos de relaxamento ao problema de uma estrutura reticulada. Neste quadro estão resumidos vários dados referentes ao problema estudado por cada autor bem como as variáveis de projeto consideradas e o método de relaxamento utilizado.....	34
--	----

Tabela 4.2: Dados necessários à resolução dos casos de estudo.....	39
---	----

Tabela 4.3: Tensões resultantes dos esforços aplicados nos elementos barra da estrutura.	40
--	----

Tabela 4.4: Constrangimentos de tensão dos vários elementos da estrutura.....	41
--	----

Tabela 4.5: Tensões resultantes dos esforços aplicados nos elementos barra da estrutura.	47
--	----

Tabela 4.6: Constrangimentos de tensão dos vários elementos da estrutura utilizando o método SIMP..	50
--	----

Tabela 4.7: Comparação de resultados entre os valores ótimos A e B do problema original e do problema relaxado através do ε -relaxation para $\varepsilon = 0.05$	55
--	----

Tabela 4.8: Comparação de resultados entre os valores ótimos A e B do problema original e do problema relaxado através do ε -relaxation para um $\varepsilon = 0.01$	55
--	----

Tabela 4.9: Comparação de resultados entre os valores ótimos A e B do problema original e do problema relaxado através do ε -relaxation para um $\varepsilon = 0.005$	55
---	----

Tabela 4.10: Comparação de resultados entre os valores ótimos A e B do problema original e do problema relaxado através do ε -relaxation para um $\varepsilon = 0.000001$	56
--	----

Tabela 4.11: Comparação de resultados entre os valores ótimos A e B do problema original e do problema relaxado através do <i>qp-approach</i> para um $q = 2.5$	56
--	----

Tabela 4.12: Comparação de resultados entre os valores ótimos A e B do problema original e do problema relaxado através do <i>qp-approach</i> para um $q = 2.9$	56
--	----

CAPÍTULO 5

Tabela 5.1: Geometria da célula unitária com furo quadrado com as diferentes discretizações da malha e os respectivos campos de tensão [Pa].	60
---	----

Tabela 5.2: Geometria da célula unitária para o caso do furo circular com fração volúmica de 50% para cada discretização da malha e os respectivos campos de tensão [Pa].	64
--	----

Tabela 5.3: Geometria da célula unitária para o caso do furo circular com fração volúmica de 80% para cada discretização da malha e os respectivos campos de tensão [Pa].	67
--	----

Tabela 5.4: Geometria da célula unitária para o caso do furo circular com malha não-quadrangular com fração volúmica de 50%. Representação dos campos de tensão para cada discretização [Pa].	70
--	----

Tabela 5.5: Geometria da célula unitária para o caso do furo circular com malha não-quadrangular e fração volúmica de 80%. Representação dos campos de tensão para cada discretização [Pa].	73
--	----

Tabela 5.6: Geometria da célula unitária para o caso do furo quadrado com carregamento ao corte 1 (tabela 3.1). Representação dos campos de tensão para cada discretização [Pa].	76
---	----

Tabela 5.7: Geometria da célula unitária para o caso do furo quadrado com rotação de 45° em malha não-quadrangular com carregamento ao corte 2 (tabela 3.1). Representação dos campos de tensão para cada discretização [Pa].	80
---	----

Tabela 5.8: Geometrias resultantes da otimização topológica da célula unitária com constrangimento de volume de 50% e filtro ativo. Campos de tensão resultantes da aplicação do carregamento hidrostático [Pa].	84
---	----

Tabela 5.9: Geometrias resultantes da otimização topológica da célula unitária com constrangimento de volume de 50% com filtro desativado. Campos de tensão resultantes da aplicação do carregamento hidrostático [Pa].	87
--	----

Tabela 5.10: Geometrias resultantes da otimização topológica da célula unitária com constrangimento de volume de 80% e filtro ativo. Campos de tensão resultantes da aplicação do carregamento hidrostático [Pa].	89
--	----

Tabela 5.11: Geometrias resultantes da otimização topológica da célula unitária com constrangimento de volume de 80% e filtro desativado. Campos de tensão resultantes da aplicação do carregamento hidrostático [Pa].	91
Tabela 5.12: Geometrias resultantes da otimização topológica da célula unitária com constrangimento de volume de 75% com filtro ativo. Campos de tensão resultantes da aplicação do carregamento corte 1 [Pa].	93
Tabela 5.13: Geometrias resultantes da otimização topológica da célula unitária com constrangimento de volume de 75% e filtro desativado. Campo de tensões resultante da aplicação do carregamento corte 1 [Pa].	96
Tabela 5.14: Geometrias resultantes da otimização topológica da célula unitária com constrangimento de volume de 50% com filtro de densidades ativo para várias discretizações da malha. Campo de tensões resultante da aplicação do carregamento corte 2 nas várias discretizações consideradas.	98
Tabela 5.15: Geometrias resultantes da otimização topológica da célula unitária com constrangimento de volume de 50% e filtro desativado. Campo de tensões resultante da aplicação do carregamento corte 2 [Pa].	100
Tabela 5.16: Representação das geometrias otimizadas e as suas equivalentes pré-definidas.	102

ANEXOS

Tabela A.1: Graus de liberdade ativos e inativos em cada nó da treliça.	119
Tabela A.2: Transformação de coordenadas dos elementos, com as respetivas rotações.	120
Tabela A.3: Representação simbólica da assemblagem das matrizes de cada elemento.	120
Tabela A.4: Representação das matrizes genéricas de rigidez local e global de cada elemento da estrutura.	121
Tabela A.5: Representação das variáveis de cada barra por uma letra.	121
Tabela A.6: Expressões genéricas para o cálculo dos esforços nos elementos, aplicáveis a ambos os casos de estudo.	124

Índice de Figuras

CAPÍTULO 1

Figura 1.1: Projeto da estrutura reticulada do bordo de ataque do modelo A380, ver Sigmund & Bendsøe (2004).	4
Figura 1.2: Estrutura reticulada do bordo de ataque do modelo A380, ver Krog et al. (2004).	4
Figura 1.3: Identificação de materiais da aeronave da Airbus, A350-900 XWB. Adaptado de Hellard (2008).	5
Figura 1.4: Estrutura da dissertação.	7
Figura 2.1: Diferentes categorias de otimização estrutural. (a) Otimização de dimensões, (b) otimização de forma, (c) otimização topológica. Adaptado de Verbart (2015).	10
Figura 2.2: Conceito de homogeneização para material celular. Adaptado de Amiano (2015).	10
Figura 2.3: Exemplo de domínio para um problema com constrangimentos de tensão, onde a região a lilás representa o domínio admissível. O ponto a laranja representa um ótimo singular, ou seja, um ponto ótimo global situado numa região degenerada do domínio admissível. Adaptado de Verbart (2015).	13
Figura 3.1: Processo de refinamento da malha onde se inicia com uma malha grosseira e se chega a uma malha refinada. O aumento da discretização da malha provoca o aumento da precisão dos resultados.	22
Figura 3.2: Carga pontual P aplicada a provete. A distribuição da tensão na vizinhança do carregamento aplicado não é uniforme. Porém, a tensão torna-se uniforme a uma certa distância do carregamento aplicado, como descrito pelo Princípio de St. Venant's.	23
Figura 3.3: Refinamento da malha original (a) pelo h -method (b) e pelo p -method (c).	24
Figura 3.4: Modelo material de um material compósito com célula unitária periódica (série de $n \times n$ células unitárias no domínio Ω de tamanho D , em teoria $n \rightarrow \infty$). Representação das condições de fronteira periódicas aplicadas à célula unitária de domínio Y e tamanho d . Adaptado de Coelho et al (2017).	27
Figura 3.5: Discretização das malhas utilizadas no problema de otimização topológica. (Malha de 128×128 não representada).	29

Figura 3.6: Representação das malhas das geometrias pré-definidas utilizadas na primeira análise de convergência. Na figura está representada a completo a malha com discretização 16×16 e ao lado o pormenor de um quarto da malha (a) para a mesma discretização, (b) 32×32 e (c) 64×64 .	30
Figura 4.1: Estrutura reticulada de três barras com dois casos de carga e três apoios fixos, e referencial global OXY considerado.	35
Figura 4.2: Representação gráfica do problema original de otimização topológica da estrutura reticulada de três barras.	43
Figura 4.3: Representação gráfica de todo o domínio do problema de otimização topológica da estrutura reticulada de três barras sem relaxamento dos constrangimentos de tensão. Nesta representação os constrangimentos são independentes do <i>design</i> .	44
Figura 4.4: Representação gráfica do domínio admissível do problema de otimização topológica da estrutura reticulada de três barras sem relaxamento dos constrangimentos de tensão. Pormenor da figura 4.3, (primeiro quadrante).	44
Figura 4.5: Domínio de projeto depois da aplicação do ε -relaxation ao problema ($\varepsilon = 0.05$).	45
Figura 4.6: Domínio de projeto depois da aplicação do ε -relaxation ao problema ($\varepsilon = 0.01$).	46
Figura 4.7: Representação gráfica do problema de otimização topológica da estrutura reticulada de três barras sem relaxamento dos constrangimentos de tensão.	51
Figura 4.8: Domínio de projeto depois da aplicação do ε -relaxation ao problema. Parâmetro de relaxamento de 0.000001.	52
Figura 4.9: Domínio de projeto depois da aplicação do ε -relaxation ao problema. Parâmetro de relaxamento de 0,005.	52
Figura 4.10: Domínio de projeto depois da aplicação do <i>qp-approach</i> ao problema. Parâmetro de relaxamento de 2.5.	54
Figura 4.11: Domínio de projeto depois da aplicação do <i>qp-approach</i> ao problema. Parâmetro de relaxamento de 2.9.	54
Figura 4.12: a) Comparação do relaxamento para valores de $\varepsilon = 0.01$ e $q = 2.85$. b) Comparação do relaxamento para valores de $\varepsilon = 0.01$ e $q = 2.96$.	57
Figura 5.1: Estudo de convergência de malha para o caso hidrostático numa célula unitária com furo quadrado: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão lida no	

ponto 1, d) Tensão lida no ponto 2, e) Tensão lida no ponto 3, f) Tensão lida no ponto 4, g) Tensão lida no ponto 5, h) Tensão lida no ponto 6. Desvio calculado pela equação (3.1). .. 61

Figura 5.2: Representação de 1/4 da célula unitária com furo quadrado. Localização dos nós onde a tensão é lida. 62

Figura 5.3: Representação de 1/4 da célula unitária com furo redondo. O arco da figura representa a aproximação da célula ao furo redondo com fração volúmica de 50%. Localização dos pontos onde a tensão é lida. 63

Figura 5.4: Estudo de convergência de malha para o caso hidrostático numa célula unitária com furo redondo com fração volúmica de 50%: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão lida no ponto 1, d) Tensão lida no ponto 2, e) Tensão lida no ponto 3, f) Tensão lida no ponto 4. Desvio calculado pela equação (3.1). 65

Figura 5.5: Representação de 1/4 da célula unitária com furo circular. O arco da figura representa a aproximação da célula ao furo redondo com fração volúmica de 80%. Localização dos pontos onde a tensão é lida. 66

Figura 5.6: Estudo de convergência de malha para o caso hidrostático numa célula unitária com furo circular com fração volúmica de 80%: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão lida no ponto 1, d) Tensão lida no ponto 2, e) Tensão lida no ponto 3, f) Tensão lida no ponto 4. g) Tensão lida no ponto 5. Desvio calculado pela equação (3.1). .. 68

Figura 5.7: Representação de 1/4 da célula unitária com furo circular com malha não-quadrangular e fração volúmica de 50%. Localização dos pontos onde a tensão é lida. 69

Figura 5.8: Estudo de convergência de malha para o caso hidrostático numa célula unitária com furo circular com malha não-quadrangular e fração volúmica de 50%: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão lida no ponto 1, d) Tensão lida no ponto 2, e) Tensão lida no ponto 3, f) Tensão lida no ponto 4. g) Tensão lida no ponto 5. Desvio calculado pela equação (3.1). 71

Figura 5.9: Representação de 1/4 da célula unitária com furo circular com malha não-quadrangular e fração volúmica de 80%. Localização dos pontos onde a tensão é lida. 72

Figura 5.10: Estudo de convergência de malha para o caso hidrostático numa célula unitária com furo circular com malha adaptativa: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão lida no ponto 1, d) Tensão lida no ponto 2, e) Tensão lida no ponto 3, f) Tensão lida no ponto 4. g) Tensão lida no ponto 5. Desvio calculado pela equação (3.1). 74

Figura 5.11: Estudo de convergência de malha para o caso corte 1 numa célula unitária com furo quadrado: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão lida no

ponto 1, d) Tensão lida no ponto 2, e) Tensão lida no ponto 3, f) Tensão lida no ponto 4. g) Tensão lida no ponto 5. h) Tensão lida no ponto 6. Desvio calculado pela equação (3.1). ..77

Figura 5.12: Representação de 1/4 da célula unitária com furo quadrado. Localização dos pontos onde a tensão é lida. 78

Figura 5.13: Representação de 1/4 da célula unitária com furo quadrado com rotação de 45° em malha não quadrangular. Representação dos pontos onde a tensão é lida. 79

Figura 5.14: Estudo de convergência de malha para o caso corte 2 numa célula com furo quadrado com uma rotação de 45° em malha não-quadrangular: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão lida no ponto 1, d) Tensão lida no ponto 2, e) Tensão lida no ponto 3, f) Tensão lida no ponto 4. Desvio calculado pela equação (3.1). 81

Figura 5.15: Representação dos elementos considerados na análise da tensão, ampliação de um elemento com a representação dos elementos considerados nas restantes discretizações e demonstração do raciocínio de apresentação de resultados: (a O quadrado a preto exterior representa o elemento da discretização 16×16, a vermelho está representada a discretização 32×32, a amarelo a discretização 64×64 e a verde a discretização 128×128. b). Demonstração do raciocínio de apresentação dos resultados nos gráficos gerados em Matlab. 82

Figura 5.16: Estudo de convergência de malha para o caso hidrostático numa geometria gerada por otimização topológica com constrangimento de volume de 50%: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão equivalente lida no elemento 1, d) Tensão equivalente lida no elemento 2. Desvio calculado pela equação (3.1). 85

Figura 5.17: Estudo de convergência de malha para o caso hidrostático numa geometria gerada por otimização topológica com constrangimento de volume de 50% com filtro desativado: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão equivalente lida no elemento 1, d) Tensão equivalente lida no elemento 2. Desvio calculado pela equação (3.1). 86

Figura 5.18: Estudo de convergência de malha para o caso hidrostático numa geometria gerada por otimização topológica com constrangimento de volume de 80% e filtro ativo: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão equivalente lida no elemento 1, d) Tensão equivalente lida no elemento 2. Desvio calculado pela equação (3.1). 88

Figura 5.19: Estudo de convergência de malha para o caso hidrostático numa geometria gerada por otimização topológica com constrangimento de volume de 80% e filtro desativado: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão equivalente lida no

elemento 1, d) Tensão equivalente lida no elemento 2. Desvio calculado pela equação (3.1).	92
Figura 5.20: Estudo de convergência de malha para o caso corte 1 numa geometria gerada por otimização topológica com constrangimento de volume de 75% e filtro ativo: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão lida no elemento 1, d) Tensão lida no elemento 2. Desvio calculado pela equação (3.1).....	94
Figura 5.21: Estudo de convergência de malha para o caso corte 1 numa geometria gerada por otimização topológica com constrangimento de volume de 75% e filtro desativado: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão equivalente lida no elemento 1, d) Tensão equivalente lida no elemento 2. Desvio calculado pela equação (3.1).	95
Figura 5.22: Estudo de convergência de malha para o caso corte 2 numa geometria gerada por otimização topológica com constrangimento de volume de 50% e filtro ativo: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão equivalente lida no elemento 2. Desvio é calculado pela equação (3.1).	97
Figura 5.23: Estudo de convergência de malha para o caso corte 2 numa geometria gerada por otimização topológica com constrangimento de volume de 50% e filtro desativado: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão equivalente lida no elemento 2. Desvio calculado pela equação (3.1).....	99
Figura 5.24: Representação do estudo comparativo entre a geometria pré-definida do furo com fração volúmica de 80% em malha não quadrangular e a geometria otimizada para o caso hidrostático com fração volúmica de 80% com e sem filtro. a) Energia de deformação e b) Tensão equivalente máxima.	103
Figura 5.25: Estudo de compromisso entre o desvio da energia de deformação e o custo computacional para a análise das geometrias p'pre-definidas. a) Furo circular com fração volúmica de 50% e malha não-quadrangular, b) Furo circular com fração volúmica de 80% e malha não- quadrangular, c) Furo quadrado corte 1, d) Furo quadrado com rotação 45° em malha quadrangular corte 2.....	104
Figura 5.26: Estudo de compromisso entre o desvio da energia de deformação e o custo computacional para a otimização de célula unitária. a) Otimização com fração volúmica de 50% e carregamento hidrostático, b) Otimização com fração volúmica de 80% e carregamento hidrostático, c) Otimização com fração volúmica de 75% e carregamento corte 1, d) Otimização com fração volúmica de 50% e carregamento corte 2.....	105
Figura 5.27: Representação das curvas de compromisso da análise e da otimização.	105

ANEXO

- Figura A.1:** a) Malha de EF da estrutura reticulada. b) Graus de liberdade de cada nó da estrutura. 119
- Figura A.2:** Dois tipos de malha de elementos finitos gerados pelo programa. a) Malha de dominio cubico e b) Malha de dominio laminar. 127
- Figura A.3:** Numeração dos nós no primeiro elemento de 8 nós da malha no *software* Ansys e no programa em FORTRAN. 128
- Figura A.4:** Numeração dos nós do primeiro elemento de 20 nós da malha no *software* Ansys e no programa em FORTRAN. 128

Simbologia e notações

Latim

A_i	Área de seção.
C^H, C_{ijkl}^H	Tensor da flexibilidade homogeneizado.
D	Desvio.
D	Dimensão característica do domínio macroscópico.
d	Dimensão característica do domínio microscópico.
E_0	Módulo de elasticidade do material base da microestrutura.
E_{ijkl}^0	Tensor da elasticidade ou rigidez do material base da microestrutura.
E_{ijkl}	Tensor da elasticidade ou rigidez.
E^H, E_{ijkl}^H	Tensor da elasticidade ou rigidez homogeneizado.
f	Função objetivo.
g_{ij}	Função dos constrangimentos.
K	Matriz de rigidez.
L_i	Comprimento da barra.
n	Fator de escala.
N	Discretização.
p	Expoente de penalização.
q	Expoente de relaxamento.
R_{min}	Raio do filtro de densidades.
S	Energia de deformação.
T	Matriz de transformação.
u_i	Vetor dos deslocamentos.
V^*	Limite superior para a fração volúmica de material disponível.
Y	Domínio microscópico.

Grego

α	Ângulo de rotação do elemento barra.
ε	Parâmetro de relaxamento.
ε_{rs}^0	Campo de deslocamentos macroscópico médio.
ϵ	Vetor de extensão macroscópica.
η	Fator de penalização associado à tensão.
ρ	Função da densidade macroscópica.

σ, σ_{ij}	Tensor das tensões.
χ_i	Modos de deformação locais da célula.
Ψ	Domínio macroscópico.
ω	Fator de ponderação.
Ω_{mat}^d	Domínio material.
Ω^d	Domínio de projeto.

Operadores

$\langle . \rangle$	Simbologia referente a quantidades homogeneizadas.
---------------------	--

Abreviaturas

APDL	Ansys Parametric Design Language
EF	Elementos Finitos
MEF	Método dos Elementos Finitos
MMA	Method of Moving Asymptotes
MPVC	Mathematical Programs with Vanishing Constraints
SIMP	Solid Isotropic Material with Penalisation

1 Introdução

Durante as últimas décadas, o grande desenvolvimento de computadores e de *software* disponíveis no mercado têm sido extensamente utilizados em áreas como a Engenharia e a maioria das Indústrias. Estas ferramentas tornaram-se poderosas aliadas na concepção e desenvolvimento de novos produtos. Estão presentes em todas as etapas, desde o projeto conceptual, análise, planeamento e controlo de qualidade.

Uma das áreas de Engenharia de grande interesse científico é a análise e otimização de estruturas e materiais. Esta área é de grande importância devido à enorme variedade de aplicações e utilidade em projetos de engenharia, sendo importante realçar o grande interesse da indústria aeronáutica nesta área. Ao introduzir a otimização estrutural no processo de desenvolvimento de produtos é possível alcançar modelos mais leves ou otimizar outras características. De forma a garantir o desenvolvimento de modelos otimizados não é possível apenas confiar na experiência e intuição do engenheiro, é necessário também a aplicação de métodos de otimização estrutural. Estes métodos são técnicas matemáticas que, através de um processo iterativo procuram uma solução ótima (local) para um problema de otimização. Em projeto estrutural a otimização aplica-se a um variado tipo de problemas, nomeadamente a minimização da massa de uma estrutura com constrangimentos de tensão ou de deslocamentos, com o objetivo de procurar obter a solução mais adequada a desempenhar a função pretendida.

A otimização topológica é uma das categorias de otimização estrutural que tem recebido maior atenção nos últimos anos e é também foco desta dissertação. Desde que foi introduzida por Bendsøe & Kikuchi (1988), a otimização topológica tem sido usada para determinar a estrutura mais rígida utilizando uma função que minimiza a *compliance* (flexibilidade). Contudo, este não é efetivamente o objetivo dos problemas práticos de otimização topológica de estruturas. Um

objetivo mais realista seria a minimização da massa enquanto constrangimentos de tensão são satisfeitos. Porém, a implementação de constrangimentos de tensão em problemas de otimização topológica é um processo que apresenta várias dificuldades. Devido ao facto de ser necessário satisfazer os constrangimentos de tensão em múltiplos pontos dentro de um elemento e de os problemas de otimização topológica serem caracterizados por grande número de elementos, resulta num problema de otimização em larga escala, o que se traduz num enorme custo computacional. Além disso, se os constrangimentos de tensão forem implementados sem qualquer cuidado, o aparecimento de singularidades no processo de otimização impede o otimizador de distribuir realisticamente material do domínio de projeto. Estas são questões fundamentais da implementação de constrangimentos de tensão em problemas de otimização topológica que são exploradas no âmbito desta dissertação.

O desenvolvimento de modelos matemáticos que descrevem analiticamente fenómenos físicos é uma atividade muito importante da engenharia. Estes modelos matemáticos são muitas vezes baseados em leis fundamentais da física como o princípio da conservação da massa, do momento linear ou da energia. Tendo em conta a complexidade dos modelos matemáticos que caracterizam o comportamento físico de uma estrutura, a sua resolução através de métodos analíticos pode ser difícil ou até mesmo impossível de obter sem que seja necessário recorrer a simplificações das equações ou domínios que caracterizam o modelo. Contudo, o aparecimento e desenvolvimento de computadores e *software* veio possibilitar a implementação de modelos matemáticos e métodos numéricos com objetivo de resolver diversos problemas de engenharia. Esta ferramenta denomina-se por simulação numérica e é bastante utilizada na área da mecânica computacional. Um dos métodos numéricos mais utilizados nos dias de hoje é o método dos elementos finitos (MEF).

Nesta dissertação é realizado um estudo de convergência de malha de elementos finitos. Como referido anteriormente, o MEF é uma ferramenta computacional que foi desenvolvida para lidar com modelos numéricos capazes de prever situações reais. O modelo numérico começa com a criação de uma geometria que simula o modelo físico com toda a informação acerca das propriedades do material, carregamentos aplicados e constrangimentos. Esta informação permite a previsão do comportamento real do modelo, muitas vezes com elevados níveis de precisão. A precisão que é possível obter com o uso do MEF está diretamente relacionada com o tipo e dimensão dos elementos da malha utilizados. A malha de elementos finitos é utilizada para subdividir o modelo geométrico em subdomínios chamados elementos, onde em cada um deles são resolvidas um conjunto de equações. Estas equações aproximam o modelo real composto por equações complexas através de funções polinomiais definidas em cada elemento. À medida que

a malha é refinada os elementos vão ficando cada vez mais pequenos e a solução computacional aproxima-se da solução real. Este refinamento da malha e consequente aproximação ao resultado real tem um custo computacional agregado pois, quanto menor o tamanho dos elementos maior o seu número e maior o número de equações a resolver. O papel do estudo de convergência de malha está diretamente relacionado com a precisão do resultado e o custo computacional agregado, e o objetivo principal deste estudo é encontrar o equilíbrio entre a precisão e o custo computacional.

1.1 Motivação

A minimização do peso teve sempre um papel fundamental e crítico no projeto e conceção de aeronaves. Envolve parâmetros como o consumo de combustível e as emissões de CO₂, o rendimento dos aparelhos no transporte de pessoas e bens, bem como o custo final de fabrico. Uma maneira de minimizar o peso é através da otimização dimensional, de forma ou topologia de cada peça individual da aeronave. Outra maneira é através da utilização de materiais compósitos em vez de materiais convencionais. Para se chegar a um projeto ótimo, não basta apenas confiar no senso comum, como às vezes acontece em projetos de engenharia hoje em dia. Sendo a aeronáutica uma área muito exigente, é necessário chegar ao projeto ótimo de forma cuidada, especialmente porque os vários componentes da aeronave estão submetidos a múltiplos casos de carga. Isto requer uma formulação correta do problema de otimização e a utilização de algoritmos eficazes e eficientes na busca da solução ou soluções ótimas do problema.

Os métodos da otimização estrutural são muitas vezes utilizados como forma de obter um projeto ótimo de componentes. O método de otimização estrutural com maior potencialidade é a otimização topológica. Esta consiste na distribuição ótima de material num determinado domínio sem ser necessário à priori definir uma geometria da peça ou estrutura. Esta versatilidade própria da otimização topológica permite que seja uma poderosa ferramenta de otimização, e devido a esse facto está a ter uma grande expansão e desenvolvimento na indústria, estando já presente na indústria aeronáutica. A Airbus recorreu recentemente a métodos de otimização topológica no projeto do modelo de aeronave A380. O modelo necessitava de reduções significativas de peso para que o seu fabrico fosse viável. Durante o desenvolvimento do projeto, a utilização de técnicas de otimização topológica foi estudada quanto à sua aplicabilidade na indústria aeronáutica. Destes estudos resultou um novo projeto das estruturas reticuladas (*ribs* em inglês) interiores de fixação do bordo de ataque da asa, como se pode observar na figura 1.1 e 1.2, o que se traduziu numa redução do peso relativamente à solução de projeto anterior, ver Sigmund & Bendsoe (2004). A aplicação da otimização topológica no desenvolvimento do projeto do modelo A380, contribuiu

para uma redução no peso total do avião de cerca de uma tonelada, ver Krog, Tucker, Kemp, & Boyd (2004).



Figura 1.1: Projeto da estrutura reticulada do bordo de ataque do modelo A380, ver Sigmund & Bendsøe (2004).

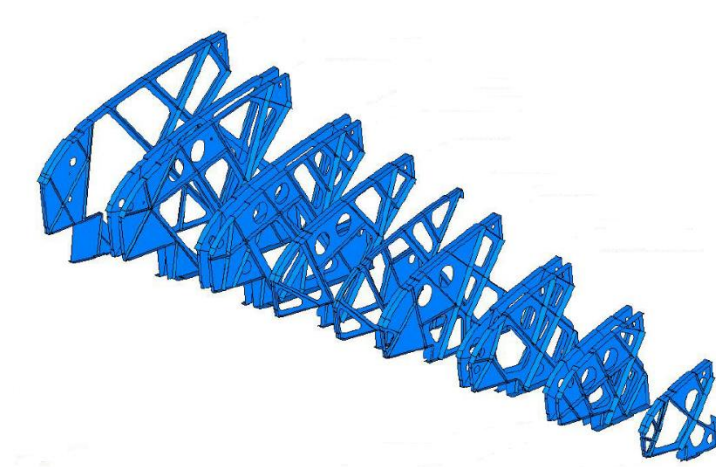


Figura 1.2: Estrutura reticulada do bordo de ataque do modelo A380, ver Krog et al. (2004).

Como referido anteriormente, a escolha de materiais representa também um ponto crítico na minimização do peso. Com os avanços tecnológicos e inovação da engenharia, para que os materiais de construção pudessem cumprir os requisitos necessários de projetos inovadores, foram sujeitos a várias alterações. Combinando as diversas propriedades físicas e químicas dos materiais, chegou-se a uma nova classe de materiais, os materiais compósitos. Estes são materiais que são compostos por dois ou mais constituintes diferentes, ver Ashby & Jones (1996). Na indústria aeronáutica, a utilização de materiais compósitos tem estado em constante expansão. Em aeronaves como por exemplo o modelo A350-900 XWB da Airbus, os materiais compósitos representam mais de 50% dos materiais utilizados na construção dos vários componentes da aeronave. Na figura 1.3 observa-se que os materiais compósitos estão presentes no fabrico de componentes da fuselagem, da asa traseira e asas centrais, e na empenagem do avião. Além da

minimização da massa e de todas as vantagens que resultam desse aspeto, a utilização de compósitos traz benefícios como o menor custo de fabrico, melhor qualidade na robustez da aeronave, performance melhorada e menor tempo de amortização devido à redução de custos de manutenção, ver Hellard (2008).

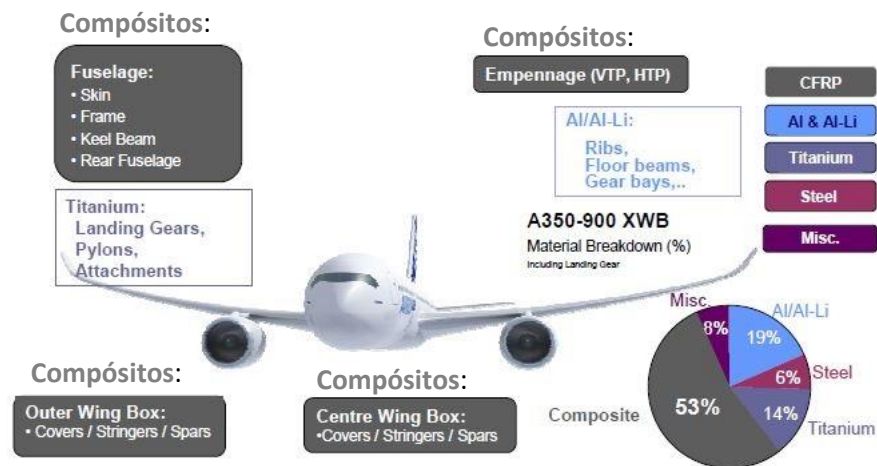


Figura 1.3: Identificação de materiais da aeronave da Airbus, A350-900 XWB. Adaptado de Hellard (2008).

1.2 Objetivos da dissertação

O principal objetivo desta dissertação de mestrado é o desenvolvimento da investigação científica relacionada com análise e otimização de materiais compósitos de microestrutura periódica, mais propriamente os problemas de não-linearidade e singularidades existentes em problemas de otimização topológica com critérios de tensão. Nesta dissertação é dada especial atenção tanto à implementação de critérios de tensão a problemas de otimização topológica e às dificuldades associadas a esse processo, bem como à distribuição de tensões em modelos otimizados topologicamente com constrangimentos de volume.

O início dos estudos para o desenvolvimento desta dissertação passou por um primeiro contacto com o código de 99 linhas de otimização topológica desenvolvido em Matlab, por Sigmund (2001). Este possibilitou a realização de otimizações topológicas em domínios bidimensionais e obter diferentes topologias alterando os diferentes parâmetros referentes às condições fronteira. Em seguida, para corresponder às necessidades do tema foi necessário desenvolver um código em Matlab articulado com um programa em APDL (*Ansys Parametric Design Language*) que funciona como gerador da malha de elementos finitos e conversor para ser lido por um programa escrito em FORTRAN que faz otimização de topologia de microestruturas

de materiais periódicos. O código em Matlab/APDL foi desenvolvido parametricamente para que seja possível gerar qualquer discretização de malha necessária (ver Anexo II).

Um objetivo desta dissertação consiste na análise detalhada da implementação de constrangimentos de tensão em problemas de otimização topológica e das principais dificuldades associadas, como as singularidades. São demonstrados também métodos de relaxamento existentes para a implementação de constrangimentos de tensão utilizados para ultrapassar tais dificuldades sendo que, para tal, é usado um problema de uma estrutura reticulada de três barras, bastante explorado na literatura, e resolvendo-o de várias maneiras possíveis para demonstrar a utilização e efeito dos vários métodos de relaxamento. Em seguida é explorado o código de FORTRAN que permite resolver problemas de otimização topológica com constrangimentos de volume numa célula de domínio unitário, em primeiro lugar numa vertente de análise dos campos de tensão em geometrias pré-definidas com cargas aplicadas e numa segunda fase realizando otimizações de topologia com constrangimentos de volume, fazendo a análise dos campos de tensão nas geometrias otimizadas e comparando com os resultados das geometrias pré-definidas. Estas análises e otimizações foram realizadas para discretizações da célula unitária de 8×8 , 16×16 , 32×32 , 64×64 e 128×128 elementos. Foi elaborado um estudo de convergência de malha com base naquelas discretizações com o objetivo de fornecer informações acerca da distribuição e comportamento da tensão em geometrias geradas por otimização topológica e fornecer informação acerca do melhor compromisso entre o custo computacional e a precisão dos resultados.

1.3 Estrutura da dissertação

A presente dissertação está dividida em 6 capítulos. Na figura 1.4 é possível observar a estrutura da dissertação onde se distinguem dois blocos principais diferentes: a) Revisão literária, onde se dá especial atenção aos critérios de tensão e ao estudo de convergência de malha de elementos finitos e b) Desenvolvimento e análise de resultados, no qual são desenvolvidos o problema da estrutura reticulada e o estudo de convergência de malha.

No capítulo 1 dá-se uma introdução ao tema, abordando superficialmente as temáticas relacionadas com o tema da dissertação. São também mencionadas as motivações envolvidas no desenvolvimento deste estudo e os objetivos propostos. No final deste capítulo é explicada toda a estrutura da dissertação.

No capítulo 2 é realizada a revisão literária acerca dos desenvolvimentos feitos ao nível da otimização topológica de estruturas e a aplicação de constrangimentos de tensão. São

abordadas as dificuldades associadas a implementação de constrangimentos de tensão em problemas de otimização topológica e os vários métodos de relaxamento existentes.

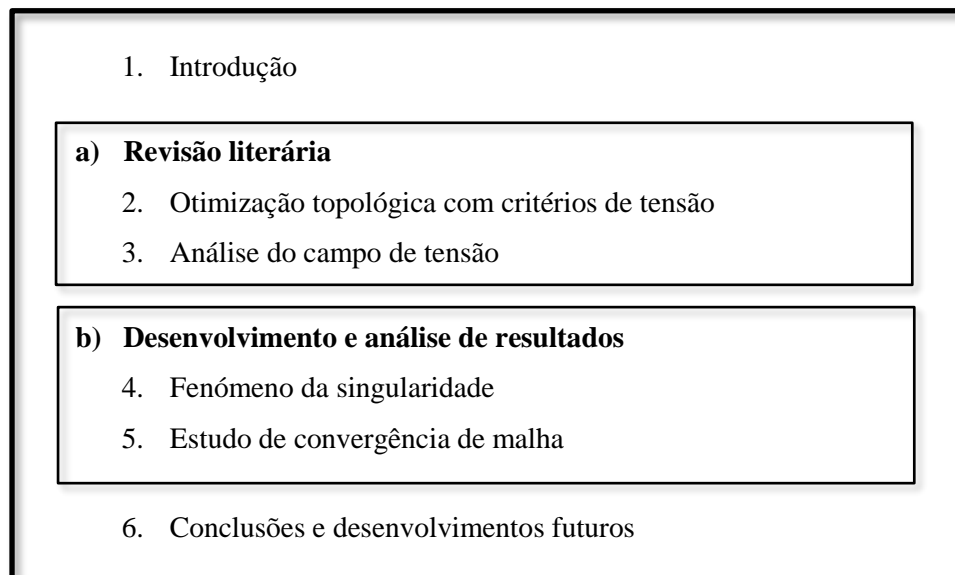


Figura 1.4: Estrutura da dissertação.

No capítulo 3 é explicada toda a informação acerca de um estudo de convergência de malha de elementos finitos e a análise de campos de tensão. São abordados os procedimentos necessários e é dada uma base para ajudar na discussão dos resultados no capítulo 5. São também explicados os passos dados na realização do estudo de convergência de malha desta dissertação. É também feita neste capítulo a apresentação do modelo material e problema de otimização topológica considerado.

No capítulo 4 é discutido o fenómeno da singularidade. Neste capítulo é resolvido o problema de uma estrutura reticulada de três barras onde são aplicados os métodos de relaxamento discutidos no capítulo anterior. Este capítulo tem como objetivo demonstrar o fenómeno da singularidade de um ponto de vista prático e didático.

No capítulo 5 desenvolve-se um estudo de convergência de malha ao nível da energia de deformação e da tensão. Este estudo é dividido em três partes, a primeira incide sobre a análise de geometrias pré-definidas para os carregamentos a que são sujeitas. Posteriormente é analisada a distribuição de tensões focando o estudo na tensão equivalente máxima e na tensão analisada ao nível dos nós. É também verificada a convergência da energia de deformação. Na segunda parte o estudo incide sobre geometrias otimizadas topologicamente com constrangimentos de

Introdução

volume. Neste caso são consideradas a tensão equivalente máxima e a tensão nos elementos. Também se verifica neste caso a convergência da energia de deformação. Na parte final os resultados de ambos os estudos são comparados e são extraídas conclusões dessa comparação. Nesta última parte é também analisado o compromisso ideal entre o custo computacional e a precisão dos resultados de análise e otimização.

No capítulo 6 apresentam-se as conclusões e desenvolvimentos futuros. Neste capítulo é realizada uma retrospectiva de todo o trabalho desenvolvido no âmbito desta dissertação e são discutidos todos os resultados obtidos. Finalmente são deixados em aberto temas que darão continuidade à investigação desenvolvida nesta dissertação.

2 Otimização topológica com critérios de tensão

2.1 Otimização estrutural

A otimização estrutural é uma área que engloba um conjunto de teorias e métodos que procuram obter a estrutura que desempenha mais eficientemente a função pretendida. Estes métodos são baseados tipicamente em programação matemática que através de sucessivas iterações chegam à estrutura otimizada.

Existem três categorias de otimização estrutural. A otimização de **dimensões**, que consiste na otimização de cada elemento da estrutura utilizando dimensões geométricas como variáveis de projeto (ver figura. 2.1a). A otimização de **forma**, que se baseia na otimização de uma estrutura através da variação da fronteira do domínio ocupado pela mesma (ver figura 2.1b). Estas duas primeiras categorias necessitam *a priori* de um *design* de base (topologia fixa) que pode ser o resultado da intuição, experiência e conhecimento do projetista. Finalmente, destaca-se um outro tipo de otimização, a otimização **topológica**. Este método, não necessita de um *design* base, necessita apenas da definição de um domínio de projeto sujeito a condições de fronteira onde será encontrada a distribuição ótima de material (topologia ótima). A otimização topológica é a que apresenta maior potencial na área da otimização estrutural (ver figura 2.1c). Em termos de desenvolvimento, a otimização estrutural é uma área que se tem vindo a desenvolver bastante, sobretudo, desde os anos 60, primeiro com a otimização de dimensões, por sua vez seguiu-se a otimização de forma nos anos 70 e finalmente a otimização topológica nos anos 80.

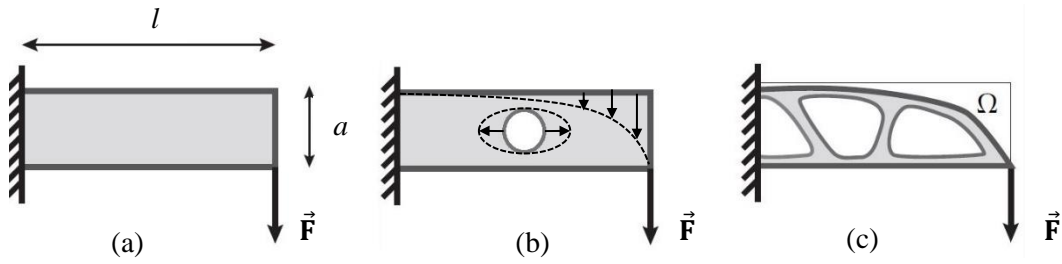


Figura 2.1: Diferentes categorias de otimização estrutural. (a) Otimização de dimensões, (b) otimização de forma, (c) otimização topológica. Adaptado de Verbart (2015).

A otimização topológica de estruturas pode ser separada quanto a classes de problemas a resolver: meios discretos e contínuos. A otimização topológica a partir de um meio discreto, foi abordada inicialmente por Dorn, Gomory, & Greenberg (1964), que aplicaram um método de programação linear para a otimização topológica de treliças onde as variáveis de projeto são as áreas transversais das barras ou vigas, introduzindo assim a *ground structure approach*. A otimização topológica a partir de um meio contínuo, foi inicialmente abordada por Bendsøe & Kikuchi (1988), que introduziram o método da homogeneização.

O método da homogeneização introduzido por Bendsøe & Kikuchi (1988), baseia-se no preenchimento de um domínio ocupado pela estrutura com um modelo de material poroso, assumindo uma microestrutura com furo, como se pode observar na figura 2.2. Naquele trabalho a porosidade em cada elemento é definida a partir das dimensões do furo assumidas como variáveis de projeto no problema de otimização. Neste método, o algoritmo de otimização tenta aumentar a porosidade onde o material não está a ser utilizado e reduzir a porosidade onde existe maior necessidade de material. O modelo de material pode ser assumido como um material compósito de microestrutura periódica com propriedades elásticas calculadas pela teoria matemática da homogeneização.

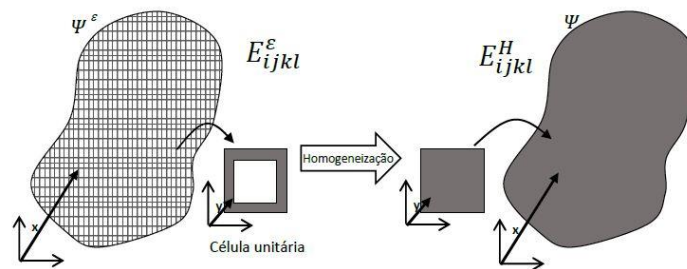


Figura 2.2: Conceito de homogeneização para material celular. Adaptado de Amiano (2015).

Outro método de otimização topológica em meio contínuo baseado na densidade variável é o método SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*), proposto por Bendsøe (1989) e

introduzido por Rozvany, Zhou, & Birker (1992). Neste método as variáveis de projeto estão associadas tipicamente a uma variável contínua de densidade $\rho \in [0,1]$. A solução resulta na presença ($\rho = 1$) ou ausência de material ($\rho = 0$) no domínio. As densidades intermédias sejam penalizadas de acordo com a seguinte lei de potência:

$$E(x) = \rho(x)^p E_0 \text{ com } p > 1 \text{ e } 0 \leq \rho(x) \leq 1 \quad (2.1)$$

Onde $\rho(x)$ é a densidade do material, E_0 o Módulo de Young de um material base sólido e isotrópico e p o expoente de penalização. O objetivo do expoente p é de penalizar as densidades intermédias ($0 < \rho < 1$), forçando o algoritmo a convergir para $\rho = 1$ (presença de material) ou $\rho = 0$ (ausência de material). Segundo Bendsøe & Sigmund (2003), para um problema com um constrangimento de volume ativo a experiência mostra que a otimização resulta de facto numa distribuição de 0's e 1's no domínio de projeto (*black and white design*) se o valor do expoente de penalização for suficientemente grande, tipicamente é escolhido $p \geq 3$.

A formulação de um problema de otimização segue normalmente três passos:

- 1 Identificação das variáveis de projeto;
- 2 Identificação da função objetivo e expressá-la em função das variáveis de projeto;
- 3 Identificação de todos os constrangimentos de projeto.

Depois de identificados todos os elementos acima descritos, um problema de otimização estrutural pode ser formulado matematicamente da seguinte forma normalizada (*standard*):

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{Sujeito a} \quad & g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad ; j = 1, \dots, m \\ & h_k(\mathbf{x}) = 0 \quad ; k = 1, \dots, p \\ & x_i^l \leq x_i \leq x_i^u \quad ; i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.2)$$

Onde $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, é o vector das n variáveis de projeto, $f(\mathbf{x})$ é a função objectivo, $g_j(\mathbf{x})$ são os m constrangimentos de desigualdade, $h_k(\mathbf{x})$ são os p constrangimentos de igualdade, x_i^l e x_i^u são os limites inferior e superior de variação das n variáveis de projeto x_i , respetivamente, Coelho & Cardoso (2012).

2.2 Constrangimentos de tensão

A aplicação de constrangimentos de tensão sempre foi associada a grandes desafios na área da otimização estrutural. Desde o início da otimização estrutural que os constrangimentos de tensão têm sido discutidos, Dorn et al. (1964) usou constrangimentos de tensão na otimização de treliças com um caso de carga, e com múltiplos casos de carga foi testado por Sved & Ginos (1968), tendo ambos se deparado com dificuldades na aplicação destes constrangimentos. O interesse na aplicação de constrangimentos de tensão é, portanto, elevado, principalmente devido ao facto de a tensão ser um dos critérios de projeto mais utilizados em engenharia.

A formulação deste tipo de problemas está normalmente associada a problemas de otimização da massa da estrutura sem violar os constrangimentos de tensão que satisfazem o equilíbrio elástico, ver Yalamanchili (2012). Para isso é necessário recorrer a critérios de falha como o critério de Von-Mises, utilizado para prever a cedência de metais com comportamento dúctil. Incluir critérios de falha num problema de otimização levanta sérias dificuldades na resolução do mesmo conforme resumidos em seguida: problema da singularidade, natureza local dos constrangimentos e não-linearidade.

A primeira dificuldade é o fenómeno da singularidade, que foi detetado em primeiro lugar por Sved & Ginos (1968), onde se observou que os constrangimentos de tensão eram violados quando a área da secção transversal da barra se aproximava de zero, o que impedia que a barra fosse removida. O fenómeno da singularidade consiste em soluções denominadas **ótimas singulares** (*singular optima* em inglês), que são soluções ótimas, às quais os algoritmos de otimização baseados no gradiente não conseguem chegar, convergindo então para um ótimo local. Tipicamente em problemas com constrangimentos de tensão, o ótimo global é também um **ótimo singular**. Kirsch (1990) estudou as características fundamentais do fenómeno da singularidade e demonstrou que a razão para estas soluções estarem inacessíveis resulta do facto de estas se encontrarem numa zona do domínio admissível degenerada, ver figura 2.3.

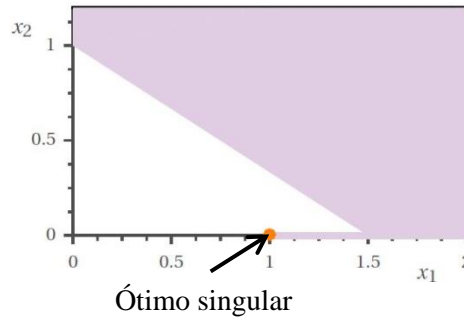


Figura 2.3: Exemplo de domínio para um problema com constrangimentos de tensão, onde a região a lilás representa o domínio admissível. O ponto a laranja representa um ótimo singular, ou seja, um ponto ótimo global situado numa região degenerada do domínio admissível. Adaptado de Verbart (2015).

A segunda dificuldade é a natureza local dos constrangimentos de tensão. Um elevado número de constrangimentos, faz com que a utilização de técnicas de otimização baseadas no gradiente sejam computacionalmente dispendiosas, pois é necessária a análise de sensibilidades de todos os constrangimentos de tensão em todos os elementos considerados, ver Verbart et al. (2013). Métodos para lidar com a natureza local dos constrangimentos de tensão em problemas de otimização topológica baseados na densidade podem ser agrupados em métodos locais, globais, regionais e em blocos agregados. Os métodos locais colocam um constrangimento em cada elemento do modelo em estudo (Bendsøe & Sigmund (2003); Pereira et al. (2004); Colominas et al. (2005); Bruggi & Venini (2007)). Os métodos globais são aplicados a múltiplos casos de carga, combinando os valores de tensão locais num único constrangimento. Isto pode ser realizado utilizando variações das funções de *Kresselmeier-Steinhauser* (*KS-function*), *p-norm measures* ou *global L^q constrains*, (Bendsøe & Sigmund (2003); Guilherme & Fonseca (2007); París et al. (2007, 2009); Qiu & Li (2010)). Uma comparação entre os métodos locais e globais é que enquanto as formulações globais simplificam o problema de otimização, não permitem garantir que valores de tensão máxima sejam assegurados localmente. Os métodos regionais e em bloco agregado (*clustering* em inglês) são técnicas que procuram restituir o controlo dos níveis de tensão máxima, ao dividirem o domínio de projeto em várias regiões diferentes. Os elementos em cada região são agregados num único constrangimento através de uma formulação global. Portanto, em vez de apenas um constrangimento global geral, múltiplos constrangimentos correspondentes a cada região do domínio são utilizados, reduzindo ligeiramente os erros associados à agregação global. Várias técnicas de agregação foram propostas na literatura (París et al. (2010); Le et al. (2010); Holmberg et al. (2013)). Até à data, as técnicas de agregação regionais demonstram a maior eficiência e robustez na incorporação de constrangimentos de tensão em problemas de otimização, ver Deaton & Grandhi (2014).

A terceira dificuldade é o comportamento altamente não-linear da função da tensão. Em problemas de otimização topológica baseados na densidade os níveis de tensão são drasticamente afetados por alterações de densidade em elementos vizinhos. Este fenómeno é exagerado em regiões críticas com grande concentração de tensões, como reentrâncias e furos, ver Le et al. (2010). Este fenómeno pode levar à existência de erros nas soluções de elementos finitos estando isso relacionado com o nível de discretização do domínio do problema e qualidade de interpolação por elementos finitos. Como forma de perceber melhor este problema pode se recorrer a estudos de convergência de malha. Um estudo de convergência de malha consiste na comparação de resultados entre malhas do mesmo domínio com diferentes refinamentos. Inicia-se o estudo gerando uma malha inicial grosseira, posteriormente é gerada uma malha com uma distribuição de elementos mais refinada. Os resultados de ambas as malhas são comparados e é gerada novamente uma malha com distribuição de elementos mais refinada que a anterior. Os resultados vão sendo comparados até que se verifique uma convergência de resultados satisfatória. A utilização de elementos finitos de ordem superior como elementos hexaedros de 20 nós em problemas tridimensionais também contribuirá para uma melhor percepção da qualidade dos resultados obtidos por comparação com elementos de 8 nós.

Para ultrapassar o problema da singularidade e tornar acessível uma solução **ótima singular** foram desenvolvidas técnicas de relaxamento: *ε -relaxation approach*, proposta por Cheng & Guo (1997), e *qp-approach* proposta por Bruggi (2008). Os próximos subcapítulos resumem estas técnicas e variações das mesmas desenvolvidas por outros autores.

2.2.1 *ε -relaxation*

Cheng & Guo (1997) propuseram uma técnica de relaxamento denominada *ε -relaxation* como solução para o problema da singularidade. Ao relaxar os constrangimentos de tensão dos membros da estrutura, é possível modificar a forma do domínio admissível e eliminar a singularidade. Para isso basta modificar o problema de otimização original ao assumir um valor muito pequeno, ε , para a área mínima de secção das barras e utilizar também esse valor para relaxar os constrangimentos de desigualdade da tensão.

O problema original de otimização topológica de minimização de massa de uma treliça pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 \min_{A_i} \quad & m = \sum_{i=1}^N \rho_i A_i L_i \\
 \text{Sujeito a} \quad & \mathbf{K}u_j = p_j, \quad j = 1, 2, \dots, M. \\
 & (\sigma_i^L - \sigma_{ij})A_i \leq 0, \\
 & (\sigma_{ij} - \sigma_i^U)A_i \leq 0,
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Com $A_i \geq 0, i = 1, \dots, N$.

O problema relaxado, proposto por Cheng & Guo (1997), é descrito a seguir, para que se possam observar as diferenças entre os dois:

$$\begin{aligned}
 \min_{A_i} \quad & m_\varepsilon = \sum_{i=1}^N \rho_i A_i L_i \\
 \text{Sujeito a} \quad & \mathbf{K}u_j = p_j, \quad j = 1, 2, \dots, M. \\
 & (\sigma_i^L - \sigma_{ij})A_i \leq \varepsilon, \\
 & (\sigma_{ij} - \sigma_i^U)A_i \leq \varepsilon,
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Com $A_i \geq \varepsilon^2, i = 1, \dots, N$.

Nesta formulação, N é o número de barras da estrutura, M diz respeito ao número de casos de carga considerados, A_i , ρ_i e L_i referem-se respectivamente à área de secção, à densidade e ao comprimento das barras da estrutura. Também σ_i^L , σ_i^U e σ_{ij} são respectivamente o limite inferior e superior da tensão, e a tensão em cada barra i para cada caso de carga j .

Considera-se ε um número muito pequeno ($\varepsilon \ll 1$). O valor de ε determina o grau de amplitude de relaxamento do problema. Com esta formulação não existe degeneração do domínio admissível. Cheng & Guo (1997) propuseram uma sequência de problemas de otimização em que o valor de ε reduz-se, $\varepsilon \rightarrow 0$, convergindo para o problema original, designando-se método da continuação (*continuous approach* em inglês). Mais à frente, no caso de estudo será explicado

que, à medida que ε tende para zero, $m_\varepsilon \rightarrow m$, onde m_ε é o óptimo global do problema relaxado, equação (2.4).

Outros autores adaptaram o ε -relaxation a problemas de otimização topológica em meios contínuos. Por exemplo, Duysinx & Bendsøe (1998) utilizaram uma variação da formulação proposta por Cheng & Guo (1997) para resolverem a questão do fenómeno da singularidade, do seguinte modo:

$$\rho \left(\frac{\sigma_{VM}}{\rho^p \sigma_{ced}} - 1 \right) \leq \varepsilon, \text{ com } \varepsilon^2 = \rho_{min} \leq \rho \quad (2.5)$$

Aqui σ_{VM} é a tensão de Von-Mises e σ_{ced} é a tensão de cedência. O expoente de penalização p foi introduzido pois neste caso, como a formulação é utilizada em conjunto com o modelo SIMP, é necessário contar com a atenuação da tensão para material com densidades ρ intermédias.

Duysinx & Sigmund (1998) também utilizaram uma formulação alternativa do ε -relaxation multiplicando ε por um fator $(1 - \rho)$. Esta multiplicação assegura que o constrangimento real seja imposto quando $\rho = 1$. Esta formulação dos constrangimentos de tensão relaxados pode ser escrita como:

$$\rho \left(\frac{\sigma_{VM}}{\rho^p \sigma_{ced}} - 1 \right) \leq \varepsilon(1 - \rho), \text{ com } \varepsilon^2 = \rho_{min} \leq \rho \quad (2.6)$$

Outra variação da formulação de Cheng & Guo (1997) é a proposta por Guilherme & Fonseca (2007). Esta formulação representa uma aproximação contínua ao problema original através do parâmetro ε , e pode ser escrita como,

$$\frac{\sigma_{VM}}{\sigma_{ced}} - 1 \leq \varepsilon^p - \varepsilon \quad (2.7)$$

Outros autores exploraram estas formulações como Pereira et al. (2004) que utilizou a formulação proposta por Duysinx & Sigmund (1998) e chegou à conclusão que o esforço computacional envolvido no problema da tensão é dez vezes maior que no problema de minimização de *compliance* convencional (maximização da rigidez). París et al. (2009) também utilizou uma formulação semelhante à proposta por Duysinx & Bendsøe (1998), ver tabela 2.1. Na tabela 2.1 apresentam-se as várias formulações do ε -relaxation utilizadas por cada autor e o tipo de problema de otimização considerado.

Tabela 2.1: Síntese da literatura sobre otimização topológica com constrangimentos de tensão utilizando o método ε -relaxation.

Autor	Constrangimento de tensão relaxado (ε -relaxation)	Problema de otimização
Cheng & Guo (1997)	$(\sigma_i^L - \sigma_{ij})A_i \leq \varepsilon,$ $(\sigma_{ij} - \sigma_i^U)A_i \leq \varepsilon,$ $\varepsilon^2 \leq A_i, \ i = 1, \dots, N.$	Minimização da massa de uma estrutura reticulada sujeita a constrangimentos de tensão
Duysinx & Bendsøe (1998)	$\rho \left(\frac{\sigma_{VM}}{\rho^q \sigma_{ced}} - 1 \right) \leq \varepsilon,$ $\varepsilon^2 = \rho_{min} \leq \rho.$	Minimização do volume de uma estrutura sujeita a constrangimentos de tensão locais
París et al. (2009)	$\rho \left(\frac{\sigma_{VM}}{\rho^q \sigma_{ced}} - 1 \right) \leq \varepsilon(1 - \rho),$ $\varepsilon^2 = \rho_{min} \leq \rho.$	
Pereira et al. (2004)		
Pierre Duysinx & Sigmund (1998)		Minimização do volume de uma estrutura sujeita a constrangimentos de tensão globais
Guilherme & Fonseca (2007)	$\frac{\sigma_{VM}}{\sigma_{ced}} - 1 \leq \varepsilon^p - \varepsilon$	

2.2.2 *qp-approach*

Proposto inicialmente por Bruggi & Venini (2007), o *qp-approach* tem como objetivo ultrapassar a dificuldade do fenómeno da singularidade. Este método baseia-se num modelo de tensão microscópica que reproduz o comportamento de um material compósito laminado poroso (*rank* 2), o qual foi proposto por Duysinx & Bendsøe (1998). Neste modelo, as densidades intermédias representam a densidade da microestrutura em termos da espessura das camadas. A tensão microscópica é a tensão verificada nessas camadas.

Para se reproduzir o comportamento da tensão nesses materiais, a tensão microscópica num problema de otimização topológica baseado na densidade, deve contemplar duas condições: (i) ser inversamente proporcional à variável de densidade e (ii) convergir para uma tensão finita quando a densidade tende para zero. Esta última condição deriva do estudo do comportamento assintótico da tensão nas camadas. Quando a espessura de uma camada tende para zero, a tensão local permanece finita assumindo que a extensão macroscópica é finita. A definição da tensão microscópica que satisfaz a primeira condição é:

$$\sigma_e = \frac{\langle \sigma_e \rangle}{\rho_e^q} = \rho_e^{p-q} \mathbf{C}_e(E_0) \langle \epsilon_e \rangle \quad (2.8)$$

Aqui, \mathbf{C}_e é o tensor de elasticidade baseado no Modulo de Young efectivo (homogeneizado), $\langle \epsilon_e \rangle$ é o vetor da extensão macroscópica. A notação $\langle . \rangle$ é utilizada para quantidades homogeneizadas. Também aqui, o valor do expoente q , deverá ser tal que a equação (2.8) satisfaça a segunda condição. A segunda condição é apenas satisfeita para $q = p$, portanto a tensão microscópica é definida por:

$$\sigma_e = \mathbf{C}_e(E_0)\langle \epsilon_e \rangle \quad (2.9)$$

Uma dificuldade que se levanta com esta definição de tensão microscópica é que é diferente de zero em densidades nulas (assumindo extensão finita): $\lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma \neq 0$. Quando a densidade é zero a tensão converge para o valor finito, correspondente à tensão para uma densidade infinitesimal nesse elemento. Portanto, o modelo não representa corretamente o fenómeno físico para o caso limite, pois, a tensão deveria ser zero quando não existe material. Consequentemente, esta propriedade impede o otimizador de chegar a uma solução ótima, já conhecida como ótima singular.

No *qp-approach*, quando $q < p$ a tensão na Eq. (2.8) será zero quando a variável de densidade no limite é zero:

$$\lim_{\rho_e \rightarrow 0} \rho_e^{p-q} \mathbf{C}_e(E_0)\langle \epsilon_e \rangle = 0, \quad \text{para } q < p \quad (2.10)$$

Assim, o conjunto de constrangimentos de tensão original pode ser substituído pelo seguinte conjunto relaxado:

$$\tilde{g}_j = \frac{\rho_j^{\varepsilon_{qp}} |\sigma_j|}{\sigma_{ced}} - 1 \leq 0, \quad \text{onde } \varepsilon_{qp} = p - q > 0, \quad \forall j \in \Omega^d \quad (2.11)$$

Ao contrário do conjunto de constrangimentos original que eram apenas aplicados ao domínio material Ω_{mat}^d , o novo conjunto de constrangimentos relaxado é aplicado a todo o domínio de projeto Ω^d . Aqui é introduzido um parâmetro de relaxamento ε_{qp} que é análogo ao parâmetro utilizado no *ε -relaxation*. Em problemas de otimização topológica baseados na densidade o *qp-approach* é normalmente aplicado utilizando um parâmetro de relaxamento relativamente alto, tipicamente $\varepsilon_{qp} = 0.5$ ou 1 . No capítulo seguinte também o *qp-approach* será aplicado ao caso de estudo.

Le et al. (2010) propuseram uma variação do *qp-approach* mais geral, que proporciona um número de esquemas de interpolação viável para a rigidez e tensão. O constrangimento de tensão relaxado é reescrito como:

$$\frac{\sigma_{VM}\eta(\rho_e)}{\sigma_{ced}} - 1 \leq 0 \quad (2.12)$$

Aqui $\eta(\rho_e)$ é um factor de ponderação da tensão (no SIMP, ρ^p é utilizado da mesma forma para ponderar a densidade dos elementos). Um domínio de projeto regular é gerado desde que $\eta(\rho_e)$ seja contínuo e $\eta(0) = 0$. Para o problema de optimização topológica com constrangimentos de tensão, o autor escolheu o factor $\eta(\rho_e) = \rho^{1/2}$, sendo que essa escolha foi baseada em funções de interpolação. Para outras restrições que $\eta(\rho_e)$ tenha que satisfazer e para o método de escolha do fator $\eta(\rho_e)$, ver Le et al. (2010).

Tabela 2.2: Síntese de formulações do método de relaxamento *qp-approach* proposto por alguns autores.

Autor	Constrangimento de tensão relaxado (<i>qp-approach</i>)	Problema de optimização	Métodos de Agregação
Bruggi & Venini (2007)	$\frac{\rho_j^{\varepsilon_{qp}} \sigma_j }{\sigma_{ced}} - 1 \leq 0$	Minimização de <i>compliance</i> de uma estrutura sujeita a constrangimentos de tensão locais	Não.
Bruggi (2008)			
Le et al. (2010)	$\frac{\rho^{1/2} \sigma_{VM}}{\sigma_{ced}} - 1 \leq 0$	Minimização da massa de uma estrutura sujeita a constrangimentos de tensão	Considerados constrangimentos regionais.
Lee et al. (2012)			Considerados constrangimentos em bloco.

As variações do método *qp-approach* de Bruggi & Venini (2007) apresentadas por outros autores baseiam-se em métodos de agregação de constrangimentos, onde são aplicados estes métodos para agregar os constrangimentos de tensão locais em constrangimentos globais, regionais ou em bloco agregado. Na tabela em cima são apresentados alguns autores que aplicaram o método *qp-approach* com e sem métodos de agregação.

3 Análise do campo de tensão

3.1 Convergência no método dos elementos finitos

Um dos objetivos principais desta dissertação é o desenvolvimento de um estudo de convergência de malha de elementos finitos que forneça informações acerca da distribuição de tensões em topologias otimizadas com um código FORTRAN. É muito importante que as tensões sigam um padrão convergente, não só para se poderem validar os resultados dessas análises, como para provar que tais resultados obtidos pelo código são fidedignos. Para desenvolvimentos futuros do código, onde o objetivo é a implementação de constrangimentos de tensão ao problema de otimização topológica, a convergência da tensão é essencial.

3.1.1 Critérios de convergência no MEF

O MEF é um método numérico largamente utilizado em problemas de engenharia com o objetivo de obter a solução de uma equação diferencial que rege um problema físico. Este método baseia-se na discretização de um domínio contínuo em elementos finitos. A precisão dos seus resultados depende, portanto do número de elementos utilizados para representar o domínio físico. À medida que a malha de elementos finitos é progressivamente refinada, a solução melhora e deve convergir para um valor específico. Para que exista convergência monótona à medida que a malha é refinada, o modelo de elementos finitos tem que obedecer a dois critérios de convergência, ao critério da integralidade (*completeness*) e ao critério da compatibilidade (*compatibility*). Se existir uma solução analítica para o problema, as soluções numéricas resultantes com o processo de refinamento da malha convergirão para a solução exata. Na figura 3.1 está demonstrado o processo de refinamento da malha, quando se aumenta a discretização também a precisão dos resultados aumenta. Esta é a definição usual de um estudo de convergência

de malha. Mas, existem situações em que a solução não converge à medida que a malha é refinada. A existência de singularidades no campo de tensão é uma dessas situações.

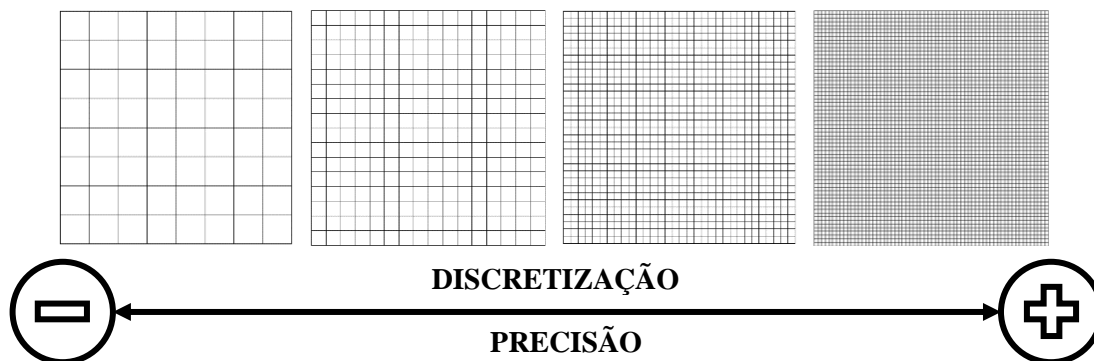


Figura 3.1: Processo de refinamento da malha onde se inicia com uma malha grosseira e se chega a uma malha refinada. O aumento da discretização da malha provoca o aumento da precisão dos resultados.

3.1.2 Singularidades na malha de elementos finitos

A singularidade devido à tensão é um ponto na malha de elementos finitos onde a tensão não converge para um determinado valor. À medida que a malha é refinada, a tensão nesse ponto continua a aumentar, sendo que teoricamente, a tensão na singularidade é infinita. As situações típicas onde as singularidades acontecem são, a aplicação de uma carga pontual, cantos reentrantes agudos na geometria e constrangimentos de deslocamento pontuais. Portanto, é possível afirmar que o fenômeno da singularidade é uma situação comum no MEF. Com o conhecimento adequado é possível determinar as possíveis localizações de singularidades na geometria e definir qual a sua importância para o modelo em estudo.

Apesar de nestas singularidades a tensão ser infinita, tal não implica que os resultados do modelo estejam completamente errados. Em primeiro lugar, os deslocamentos estão corretos até no ponto de singularidade. Apesar disso, a tensão na singularidade irá afetar todos os resultados de tensão na sua proximidade, porém, à medida que a distância ao ponto de singularidade aumenta os resultados de tensão melhoram e começam a tender para um valor específico, mais realista, consequência imediata do Princípio de St. Venant's. Este é talvez um dos mais importantes princípios e pode ser aplicado na presença de singularidades de tensões.

3.1.3 Princípio de St. Venant's

O Princípio de St. Venant's declara que o efeito local de perturbações a um campo de tensões uniforme permanece local. Isto significa que, a partir de certa distância da perturbação os resultados não serão afetados como pode ser observado na figura 3.2. A distância mínima para

que os resultados não sejam afetados é o tamanho da própria perturbação. O Princípio de St. Venant's permite aos engenheiros ignorar singularidades de tensão quando a tensão perto da singularidade não é de interesse.

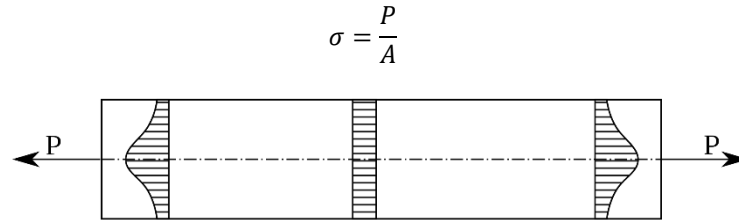


Figura 3.2: Carga pontual P aplicada a provete. A distribuição da tensão na vizinhança do carregamento aplicado não é uniforme. Porém, a tensão torna-se uniforme a uma certa distância do carregamento aplicado, como descrito pelo Princípio de St. Venant's.

Outro fenómeno relacionado com a tensão máxima num campo de tensões é a concentração de tensões, quando um elevado gradiente de tensão ocorre numa pequena área da geometria (Young & Budynas, 2002).

3.1.4 Concentração de tensões

A concentração de tensões é uma área na malha de elementos finitos onde a tensão sobe acima da tensão nominal aplicada. Comporta-se de forma semelhante à singularidade, mas a tensão nestas áreas converge para um valor finito dado que a malha seja suficientemente refinada, ao contrário do que acontece para uma singularidade. As concentrações de tensão ocorrem quando as linhas de tensão são desviadas devido a certas características ou variações na geometria. Por exemplo, algumas dessas características podem ser furos, boleados na geometria ou uma alteração na secção transversal. Elevados gradientes de tensão também se verificam em pontos de contacto entre duas geometrias.

3.1.5 Procedimento para verificar convergência

O método formal de se alcançar a convergência de malha de elementos finitos requer que a curva dos resultados (normalmente uma tensão ou energia) convirja com alguma medida de densidade da malha. Para traçar a curva são necessárias pelo menos três análises com densidades de malha diferentes de modo a ser possível identificar quando a convergência é alcançada ou, quão distante a malha mais refinada está de demonstrar convergência total da curva. Depois de comparadas soluções sucessivas, um comportamento assintótico da curva de resultados começa a surgir e as diferenças de soluções entre malhas torna-se sucessivamente mais pequenas.

Eventualmente, estas diferenças serão pequenas o suficiente e é possível afirmar que o modelo considerado convergiu.

Em teoria, por cada nível sucessivo de refinamento da malha num estudo de convergência, todos os elementos do modelo devem ser divididos em todas as direções. Apesar da afirmação anterior ser de grande importância, não é necessário aplicar a todo o modelo. O Princípio de St. Venant's referido anteriormente, infere que a tensão local numa região da geometria não afeta as tensões noutra zona qualquer. De um ponto de vista físico então, deve ser possível testar a convergência de um modelo apenas refinando a malha em regiões de interesse, e manter grosseira a malha noutra zona.

3.1.6 Métricas para o estudo da convergência

O estudo de convergência de malha requer uma escolha apropriada de métricas de refinamento de malha. Estas métricas são classificadas como locais ou globais dependendo dos resultados que são analisados, ou seja, a métrica pode ser definida numa localização específica da malha ou como o integral dos campos em toda extensão do modelo. Um exemplo de métrica local é o deslocamento ou a tensão medidas num nó do modelo de elementos finitos. Um exemplo de métrica global é o integral da energia de deformação em toda a extensão do domínio do modelo. Quando se escolhe uma métrica é importante lembrar que diferentes métricas terão diferentes comportamentos de convergência, isto é, dependendo da métrica a curva irá convergir mais ou menos rápido.

3.1.7 Técnicas de discretização da malha de elementos finitos

Existem várias técnicas para o refinamento da malha de elementos finitos utilizadas em estudos de convergência de malha. Os dois métodos mais utilizados são: a) *h-method* e b) *p-method*. Estes métodos são diferentes formas de adicionar graus de liberdade ao modelo, como se pode observar na figura 3.3. Essa diferença deve-se ao facto de como os elementos são tratados em cada método. O *h-method* utiliza vários elementos simples enquanto o *p-method* utiliza poucos elementos complexos. Além destes, existem outros métodos de refinamento da malha mas não são utilizados nesta dissertação.

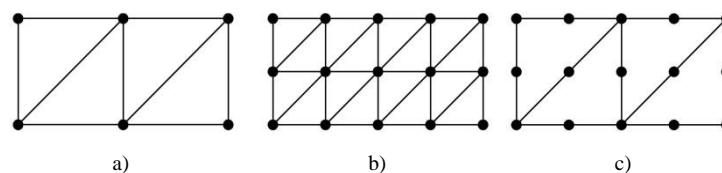


Figura 3.3: Refinamento da malha original (a) pelo *h-method* (b) e pelo *p-method* (c).

3.1.7.1 *h-method*

No *h-method* (figura 3.3b) o aumento da precisão dos resultados é obtido aumentando o número do mesmo tipo de elementos da malha. Este método caracteriza-se por diminuir o tamanho dos elementos, dividindo cada elemento existente em dois ou mais elementos, sem alterar o tipo de elemento. Se uma geometria for modelada com uma malha muito grosseira, então os resultados, por exemplo, das tensões serão bastante imprecisos. Para aumentar a precisão da solução têm que ser adicionados mais elementos. Este processo gera uma malha mais refinada. Numa análise inicial é utilizada uma malha grosseira para modelar o problema e obter uma solução. Posteriormente, para verificar a solução anterior, é criada uma malha mais refinada do modelo. Se uma solução mais precisa for pretendida a malha tem sempre que ser mais refinada que o caso anterior. O problema é analisado novamente para se obter uma segunda solução. Se existir uma grande diferença entre duas soluções consecutivas, então a malha tem que ser refinada e analisada novamente. Este processo iterativo é executado até que a diferença entre resultados seja mínima. Este é o método utilizado nesta dissertação para realizar o estudo de convergência de malha.

3.1.7.2 *p-method*

A letra p em *p-method* (figura 3.3c) significa “polinomial”, ou seja, este método faz alterações no grau dos polinómios interpoladores nos elementos finitos. Este método melhora os resultados utilizando a mesma malha comparando com o caso anterior, mas aumentando a precisão do campo de deslocamentos de cada elemento, através de funções de forma de melhor qualidade. Aumenta-se a ordem polinomial das funções de forma mantendo a malha constante. O processo de estudo de convergência de malha com este método é semelhante ao anterior, mas aumenta-se o grau do polinómio em vez do número de elementos. A grande desvantagem deste método é que o custo computacional aumenta mais rapidamente do que outros métodos de refinamento de malha. Ainda assim, o estudo de convergência de malha desta dissertação é realizado com elementos hexaedros de 8 nós e com elementos hexaedros de ordem superior de 20 nós.

3.1.8 Erros que afetam os resultados da solução de elementos finitos

Existem vários erros que afetam os resultados de elementos finitos. Quando se realiza um estudo de convergência de malha, para facilitar a interpretação e discussão dos resultados é necessário compreender as fontes dos erros que podem estar a influenciar os resultados obtidos. Os erros podem estar associados à geometria da malha e à discretização, sendo que o primeiro se

denomina por erro de modelação e o segundo por erro de discretização. O erro de modelação está associado às simplificações geométricas realizadas no modelo geométrico, omitindo certas características do modelo real como cantos arredondados, o que pode originar singularidades na distribuição de tensões. Um exemplo deste tipo de erro é o uso de elementos bilineares para representar superfícies ou bordos curvos, o que poderá resultar no aparecimento de singularidades e consequente alteração dos resultados. O erro de discretização está relacionado com a aproximação de uma função contínua utilizando um domínio discretizado próprio do MEF. Neste tipo de erros quanto menor a discretização da malha maior o erro. À medida que se aumenta a discretização da malha o resultado aproxima-se do valor exato. É boa prática numa análise de elementos finitos obter um erro de discretização menor que 10%.

3.2 Modelo material

O modelo material considerado nesta dissertação está representado na figura 3.4. Assumindo duas fases misturadas, sólido e vazio e através de repetições de uma célula de base unitária que representa a mais pequena heterogeneidade do meio heterogéneo Ω , é gerado um material celular. As propriedades elásticas desse meio são calculadas através de homogeneização assumindo condições de fronteira periódicas e periodicidade infinita da célula unitária (Guedes & Kikuchi, 1990). O domínio da célula unitária Y é discretizado por várias malhas regulares, nomeadamente, 8×8 , 16×16 , 32×32 , 64×64 e 128×128 com elementos finitos isoparamétricos hexaedros de 8 nós e de ordem superior de 20 nós, com o objetivo de obter um *design* de material ótimo. Embora sejam utilizados elementos tridimensionais o foco deste estudo está em gerar topologias ótimas em 2-D, forçando uniformidade do *design* na direção normal ao plano. Isto simplifica a complexidade do problema associado a *designs* de microestruturas em 3-D a considerar em trabalhos futuros. É atribuída uma variável de densidade por cada elemento finito da malha, assumindo que dentro do elemento a variável se mantém uniforme. As fases de sólido e vazio correspondem a uma densidade igual a 1 e a 0, respetivamente. Otimização topológica pode então ser utilizada para procurar uma topologia de uma célula unitária, melhorando um parâmetro de performance estrutural e ao mesmo tempo, cumprindo com requisitos de projeto. Este método é também conhecido como homogeneização inversa e foi introduzido originalmente por Sigmund (1994).

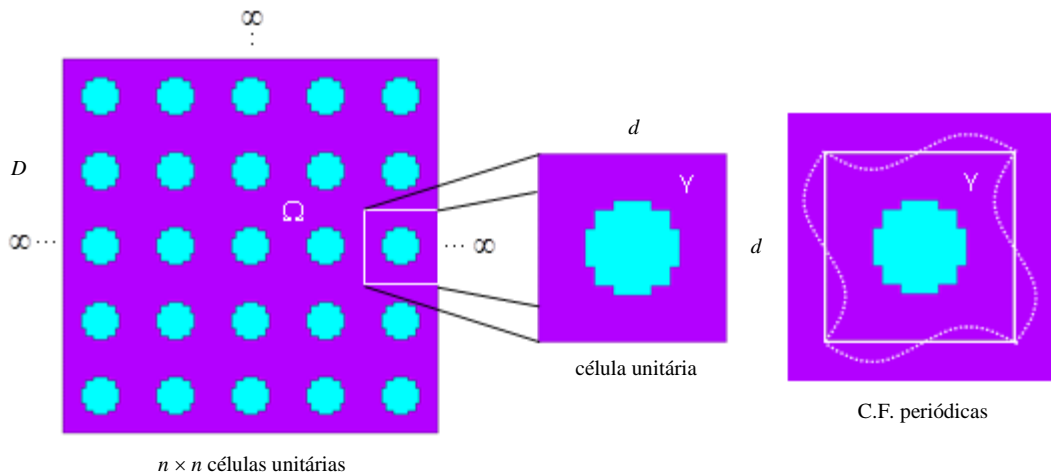


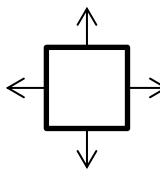
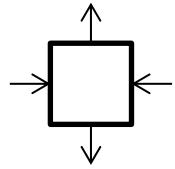
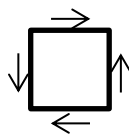
Figura 3.4: Modelo material de um material compósito com célula unitária periódica (série de $n \times n$ células unitárias no domínio Ω de tamanho D , em teoria $n \rightarrow \infty$). Representação das condições de fronteira periódicas aplicadas à célula unitária de domínio Y e tamanho d . Adaptado de Coelho et al (2017).

3.3 Estudo de convergência de malha

O estudo de convergência de malha presente nesta dissertação divide-se em dois grupos, no primeiro tratam-se os resultados da análise de elementos finitos de geometrias pré-definidas e no segundo os resultados da análise de elementos finitos com geometrias otimizadas topologicamente. Para ambos os estudos foi utilizada uma malha de elementos finitos quadrangular, mas para o primeiro foram também geradas malhas não-quadrangulares de modo a minimizar ou eliminar o erro de modelação em certas geometrias analisadas a cada discretização da malha efetuada. De modo a gerar as malhas pretendidas foi necessário desenvolver um programa em *software* Matlab que, em conjunto com o *software* Ansys que corre um código gerador de malha de elementos finitos, agrupa toda a informação gerada de forma a ser reconhecida pelo programa de otimização em FORTRAN, como está explicado no Anexo II. Para o estudo foram consideradas discretizações de 8×8 , 16×16 , 32×32 , 64×64 e 128×128 . Na figura 3.6 observam-se as malhas das geometrias pré-definidas utilizadas na primeira análise e as discretizações de 16×16 , 32×32 e 64×64 de cada uma. Não se apresenta a malha de 8×8 por ser muito grosseira e a de 128×128 devido ao tamanho reduzido dos elementos, que não seriam perceptíveis. O estudo foi realizado com elementos de 8 nós e elementos de ordem superior de 20 nós, à exceção das geometrias de malha não-quadrangular onde apenas foram utilizados elementos de 8 nós. Na tabela 3.1 estão representados os carregamentos aplicados a cada geometria no caso da análise.

O primeiro estudo, onde se analisam as geometrias pré-definas sujeitas aos carregamentos da tabela 3.1, são consideradas como métricas globais a energia de deformação S e a tensão equivalente máxima $\sigma_{\text{máx}}$. Como métrica local é considerada a tensão, σ , lida em nós de interesse na malha. Para cada caso existe uma seleção de nós onde a tensão é monitorizada.

Tabela 3.1: Carregamentos aplicados a cada geometria analisada e otimizada no estudo de convergência de malha das geometrias.

Geometria	Carregamento aplicado
<ul style="list-style-type: none"> Furo quadrado 75% em malha quadrangular Furo circular 50% em malha quadrangular Furo circular 80% em malha quadrangular Furo circular 50% em malha não-quadrangular Furo circular 80% em malha não-quadrangular 	 <p>Hidrostático</p>
<ul style="list-style-type: none"> Furo quadrado 75% em malha quadrangular 	 <p>Corte 1</p>
<ul style="list-style-type: none"> Furo quadrado 50% a 45° em malha não-quadrangular 	 <p>Corte 2</p>

No segundo estudo, as otimizações topológicas com constrangimento de volume são realizadas com as mesmas discretizações de malha quadrangular, representadas na figura 3.5. Aqui o objetivo foi recriar as geometrias pré-definidas do caso anterior através da otimização topológica de maneira a que fosse possível comparar os resultados. As geometrias obtidas são também sujeitas aos mesmos carregamentos representados na tabela 3.1. As métricas globais escolhidas para este caso foram as mesmas que no anterior, a energia de deformação S e a tensão equivalente máxima $\sigma_{\text{máx}}$. Como métrica local foi escolhida a tensão analisada em dois elementos específicos da malha situados numa zona onde se pudessem garantir sempre a presença de material ($\rho = 1$) durante o processo de otimização.

Nos dois estudos é calculado o desvio D dos resultados das diferentes discretizações de malha em relação à discretização maior, ou seja 128×128 , tanto para elementos de 8 nós como de 20 nós. O desvio é obtido através da seguinte equação:

$$D[\%] = \left| \frac{R_{n \times n} - R_{128 \times 128}}{R_{128 \times 128}} \right| \times 100, \quad (3.1)$$

onde R representa o resultado da energia de deformação S ou da tensão σ . Para ambos os estudos é também traçado um gráfico do desvio energia de deformação D contra o custo computacional. Ambos os parâmetros foram adimensionalizados para que fosse possível criar uma curva de soma. O objetivo deste gráfico é obter conclusões acerca de qual a malha com o melhor compromisso entre a precisão dos resultados e o tempo despendido no cálculo computacional.

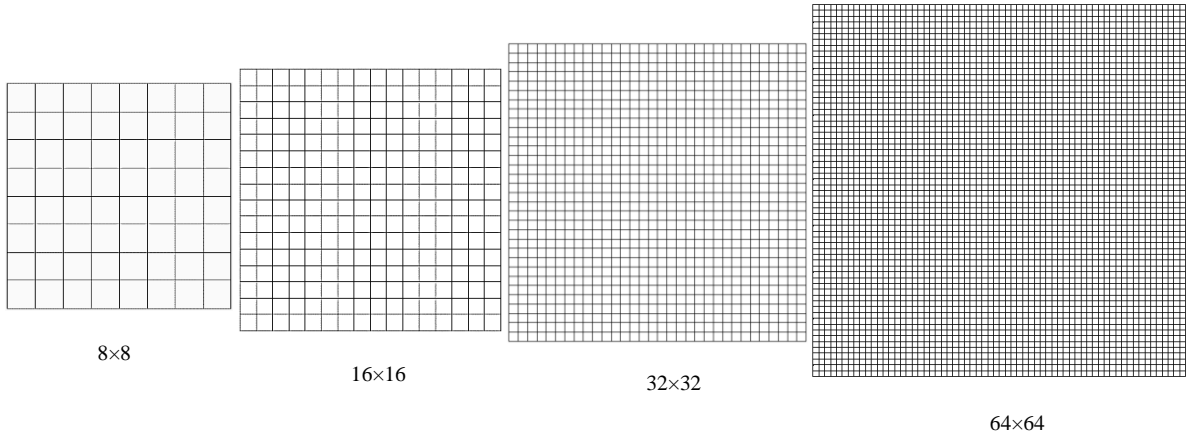


Figura 3.5: Discretização das malhas utilizadas no problema de otimização topológica. (Malha de 128×128 não representada).

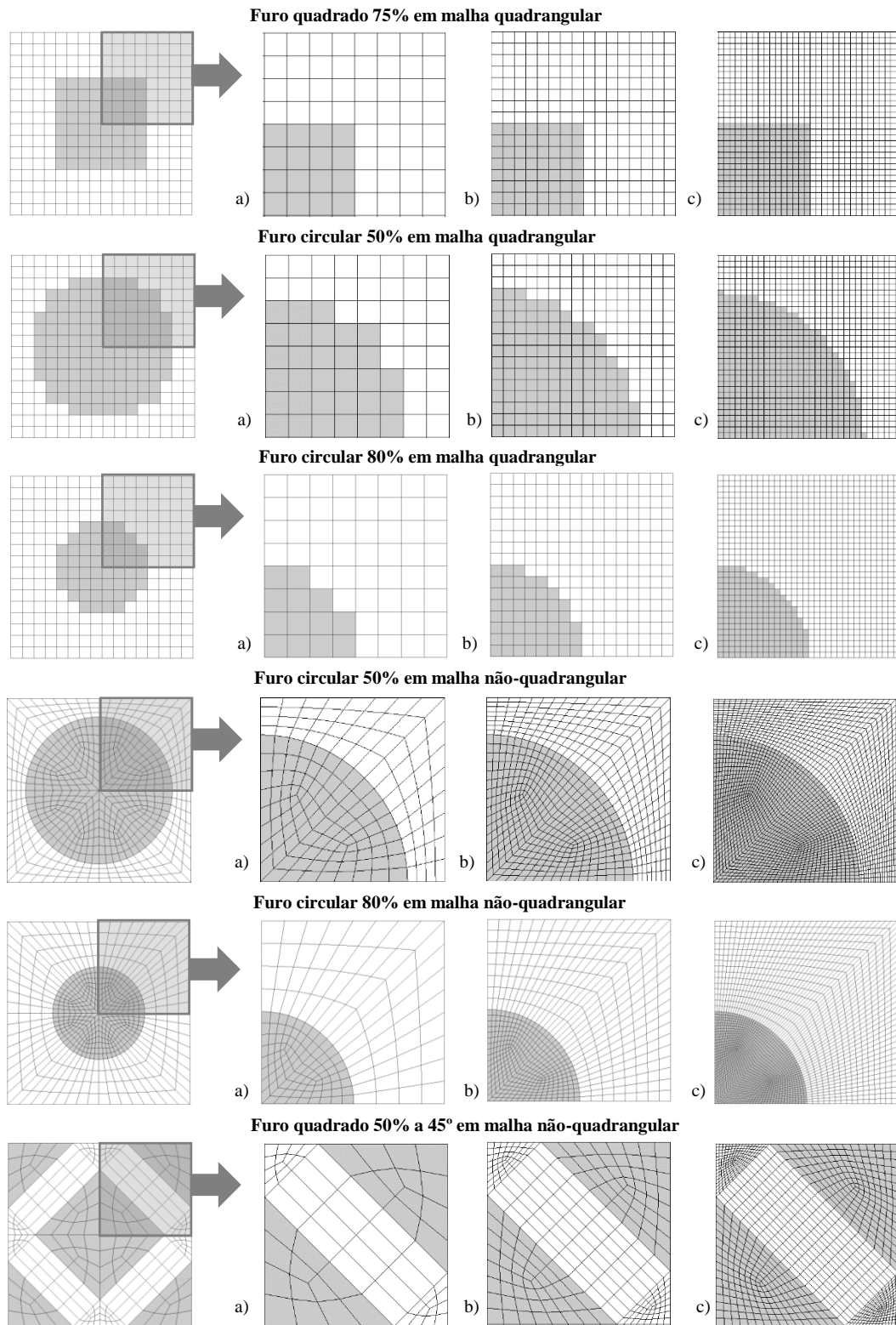


Figura 3.6: Representação das malhas das geometrias pré-definidas utilizadas na primeira análise de convergência. Na figura está representada a completo a malha com discretização 16×16 e ao lado o pormenor de um quarto da malha (a) para a mesma discretização, (b) 32×32 e (c) 64×64 .

3.4 Problema de otimização

Nesta dissertação, ao nível da otimização topológica de células unitárias de material de microestrutura periódica, utiliza-se uma formulação *standard*, a minimização de uma função objetivo que é a densidade de energia de tensão (*compliance*), sujeita a constrangimentos de volume. Nesta dissertação não são considerados constrangimentos de tensão no problema de otimização topológica no contínuo, ficando isso para trabalhos futuros. Neste estudo o foco é estudar a distribuição de tensão e o seu comportamento altamente não-linear em topologias otimizadas pela formulação dada pela equação (3.2).

No projeto ótimo de material, o domínio de projeto é o da célula unitária, e a sua topologia é obtida pela solução de um problema de distribuição de densidade ρ . A variável de densidade ρ está restringida a um intervalo $]0,1]$, em que 1 representa a presença de material e 0 a ausência do mesmo. No entanto, como se trata de um problema de meio contínuo, obtêm-se as denominadas “zonas cinzentas”, quando a variável ρ toma valores intermédios. Assim é necessário a utilização do método SIMP, para que essas densidades intermédias sejam penalizadas e convirjam para 0 ou 1, dado que valores intermédios não têm significado físico aqui.

O problema de otimização que visa a minimização da *compliance* com constrangimentos de volume pode ser definido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min_{\rho} \quad & \frac{1}{2} C_{mnkl}^H(\rho) \bar{\sigma}_{mn} \bar{\sigma}_{kl} \\ \text{sujeito a} \quad & \int_Y \rho(y) dY \leq V^* \\ \text{Com } & 0 \leq \rho \leq 1, \quad y \in Y \end{aligned} \quad (3.2)$$

em que ρ é a densidade local, assume um valor no intervalo $]0,1]$ e depende da variável de posição y na célula unitária de domínio Y . O tensor da tensão $\bar{\sigma}$ caracteriza o campo de tensões médias macroscópicas aplicadas ao compósito, C^H representa o tensor da *compliance* homogeneizado, sendo este o inverso do tensor de rigidez homogeneizado E^H . Desta forma, a solução final obtida contém uma percentagem de material, V^* , em relação ao domínio de projeto, Y , definido inicialmente. No entanto, o constrangimento deve aparecer na forma ≤ 1 devido ao algoritmo de optimização utilizado (MMA), pelo que deve ser reformulado para:

$$\int \mu(y) dY \leq V^* \Leftrightarrow \quad (3.3)$$

$$\int \mu(y) dY + (1 - V^*) \leq 1 \quad (3.4)$$

3.4.1 Análise da tensão pela homogeneização

A análise da tensão equivalente depende das tensões microscópicas (ao nível do material) que são obtidas por homogeneização assintótica, considerando as deformações características χ_k^{rs} , estudadas em publicações anteriores (Ferreira et al, 2014), ver equação (3.5).

$$\sigma_{ij} = E_{ijklm} \left(\delta_{kr} \delta_{ms} - \frac{\partial \chi_k^{rs}}{\partial y_m} \right) \varepsilon_{rs}^0 \quad (3.5)$$

onde ε_{rs}^0 é o campo de deslocamento macroscópico (médio) e relaciona-se com a tensão macroscópica da equação (3.2) através de:

$$\varepsilon_{rs}^0 = C_{rspq}^H \sigma_{pq}^0 \quad (3.6)$$

Os resultados da tensão microscópica σ_{ij} representam os estados de tensão tridimensionais que variam ao longo do domínio da célula unitária Y . A metodologia utilizada para se obterem esses mesmos resultados de tensão é baseada no *software* POSTMAT, (Ferreira et al, 2014 e Guedes & Kikuchi, 1990).

3.4.2 Filtro de densidades

No problema apresentado na equação (3.2) é utilizado um filtro de densidades, de acordo com Bruns & Tortorelli (2001) e Sigmund (2007), de forma a evitar problemas de *checkerboard*, além de também suavizar suficientemente os campos de densidade e de tensão, para que singularidades sejam menos suscetíveis de ocorrer no interior do domínio da célula unitária enquanto o seu *desing* sofre alterações durante o período iterativo do processo de otimização. Este filtro é apresentado na equação (3.7) onde ω é um fator de peso baseado num dado raio do filtro R_{min} e na distancia entre o centro dos elementos i e e .

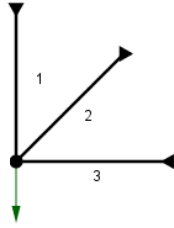
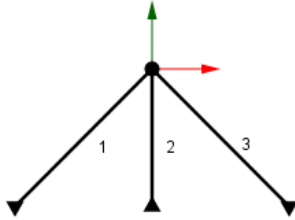
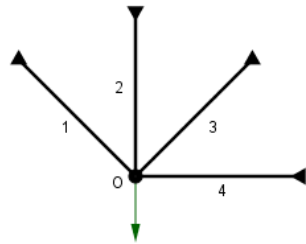
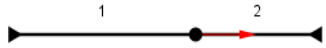
$$\tilde{\rho}_e = \frac{\sum_{i \in N_e} \omega(x_i) \rho_i}{\sum_{i \in N_e} \omega(x_i)}, \omega(x_i) = \max\{0, R_{min} - \|x_i - x_e\|\} \quad (3.7)$$

4 Fenómeno da singularidade

Neste capítulo será demonstrada a aplicação dos métodos de relaxamento de constrangimentos de tensão, ε -relaxation proposto por Cheng & Guo (1997) e qp -approach proposto por Bruggi & Venini (2007), num problema simples de otimização topológica de uma estrutura reticulada de três barras sujeita a múltiplos casos de carga. Será demonstrado o problema sem relaxamento e com relaxamento, serão explicadas as alterações provocadas pelo ε -relaxation e qp -approach ao domínio admissível do problema e sua influência na obtenção de uma solução ótima global do problema. Outros autores também estudaram a aplicação do ε -relaxation como Stolpe & Svanberg (2001), Lee et al. (2012) e Verbart (2015), assim como do qp -approach como Matteo Bruggi (2008), Le et al. (2010) e Lee et al. (2012). Verbart et al (2016) apresentou outro método de relaxamento chamado *damage approach*. Na tabela 3.1 estão referidos os vários problemas de otimização de treliças publicados por vários autores. Os problemas são comparados quanto ao modelo geométrico como o comprimento das barras, casos de carga aplicados, tensões de cedência, densidade, Módulo de Young, áreas de secção das barras, variáveis de projeto consideradas e métodos de relaxamento utilizados.

Tabela 4.1: Quadro resumo das publicações onde foram aplicados os métodos de relaxamento ao problema de uma estrutura reticulada. Neste quadro estão resumidos vários dados referentes ao problema estudado por cada autor bem como as variáveis de projeto consideradas e o método de relaxamento utilizado.

34

							
Autor	Kirsch (1990)	Verbart et al. (2016)	Lee (2012) [†]	Stolpe & Svanberg (2001)	Bruggi (2008)	Cheng & Guo (1997)	Verbart (2015)
Comprimento das barras [m]	$L_1 = L_2 = L_3 = 1$		$L_1 = L_3 = 2; L_2 = 1$		$L_1 = L_3 = \sqrt{2}; L_2 = 1$		$L_1 = 6/10; L_2 = 4/10$
Casos de carga [N]	$P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \end{Bmatrix}$		$P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{Bmatrix}; P = \begin{Bmatrix} 1.2 \\ 0 \end{Bmatrix}$		$P = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.5 \end{Bmatrix}; P = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$		$P = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$
Tensão de cedência [MPa]	$ \sigma_i^* = 20$		$ \sigma_{1,3}^* = 1/\sqrt{2}; \sigma_2^* = 1$		$ \sigma_i^* = 1; \sigma_i^* = 3$		$ \sigma_i^* = 1$
Densidade [kg/m³]	N/A	$\rho_1 = 4; \rho_{2,3} = 1/2$	$\rho_{1,3} = 1/2; \rho_2 = 1$	$\rho_i = 1$	$\rho_1 = \rho_3 \geq 0; \rho_2 \geq 0$	$\rho_{1,3} = 2; \rho_{2,4} = 1$	$\rho_1 = 1; \rho_2 = 2$
Módulo de Young [GPa]	$E_{0i} = 1$						
Área de secção transversal [m²]	$A_1 \geq 0; A_2 = A_3 \geq 0$		$A_1 = A_3 \geq 0; A_2 \geq 0$		$A_i = 1$	$A_1 = A_3 \geq 0; A_2 = A_4 \geq 0$	$A_1 \geq 0; A_2 \geq 0$
Variáveis de projeto	Áreas			Volumes	Densidades	Áreas	
Variáveis acopladas	$A_2 = A_3$		$A_1 = A_3$	$V_1 = V_3$	$\rho_1 = \rho_3$	$A_1 = A_3; A_2 = A_4$	N/A
Método de relaxamento	N/A	<i>Damage approach</i>	ε -relaxation	ε -relaxation com SIMP	<i>qp-approach</i> com SIMP	ε -relaxation	ε -relaxation e <i>qp-approach</i>

[†] O autor é omissor em relação aos valores da densidade que considerou, mas uma reprodução dos resultados desse autor permitiu no âmbito desta dissertação perceber que considerou os valores aqui divulgados.

Neste capítulo serão estudados três problemas de otimização diferentes, baseados nas publicações de Stolpe & Svanberg (2001) e Bruggi (2008). Quanto ao modelo geométrico considera-se o mesmo nos três casos. As diferenças entre eles baseiam-se nas variáveis de projeto consideradas e na aplicação de diferentes métodos de relaxamento. Considerando a área de secção das barras como variável de projeto aplica-se no primeiro caso o método ε -relaxation. Esta resolução baseia-se na publicação de Stolpe & Svanberg (2001) e representa o primeiro caso de estudo. Para o segundo caso, considera-se a densidade como variável de projeto, de forma a aplicar o método SIMP ao problema de otimização para que seja possível a aplicação do método de relaxamento qp -approach. Para comparar os dois métodos de relaxamento é também aplicado o método ε -relaxation ao problema definido com o método SIMP. Esta resolução é baseada na publicação de Bruggi (2008).

4.1 Modelo geométrico

Na figura 4.1 é apresentada a estrutura reticulada de três barras utilizada aqui como caso de estudo. Esta estrutura foi também analisada em Stolpe & Svanberg (2001) e Bruggi (2008) como está indicado na tabela 3.1. Como se pode observar A_i , L_i e ρ_i são respetivamente a área de secção, o comprimento de cada barra e a densidade de cada barra, onde i diz respeito ao número do elemento. Estão também representados os dois casos de carga considerados P_j , onde j representa o número de cada caso de carga.

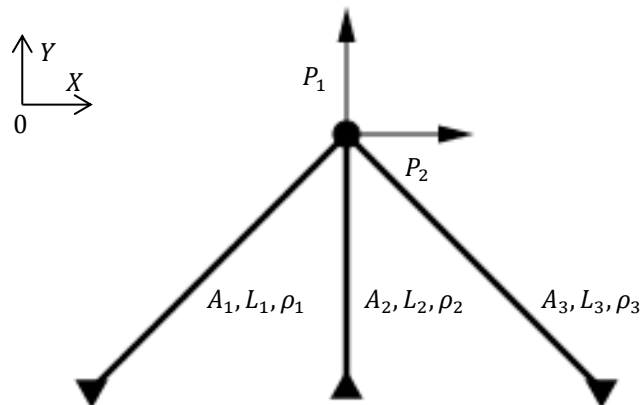


Figura 4.1: Estrutura reticulada de três barras com dois casos de carga e três apoios fixos, e referencial global OXY considerado.

Os dados sobre este problema serão retirados mais à frente da tabela 4.1 quando for introduzido cada caso de estudo, pois os valores referentes às tensões de cedência, às áreas de secção das barras e às densidades das barras diferem entre cada caso.

4.2 Modelo numérico

O modelo numérico com a representação da malha de elementos finitos para a treliça e os graus de liberdade respetivos em cada nó, bem como as transformações de coordenadas e montagem das matrizes globais de cada elemento estão contidos no Anexo I.

Com o propósito de resolver um problema de otimização topológica com constrangimentos de tensão recorre-se ao método dos elementos finitos para analisar e calcular as tensões em cada barra da treliça. Como cada caso de estudo tem valores diferentes apresenta-se em seguida uma solução paramétrica do problema de elementos finitos. Posteriormente introduzem-se os valores numéricos para cada caso.

4.2.1 Pré-processamento

Começa-se por calcular as matrizes de rigidez dos elementos locais $[\mathbf{K}_l]$ e globais $[\mathbf{K}_g]$, para de seguida se proceder à montagem das matrizes globais dos elementos e se obter a matriz de rigidez da estrutura $[\mathbf{K}]$.

A matriz de rigidez do elemento barra com dois graus de liberdade em coordenadas locais geral é:

$$[\mathbf{K}_l] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

A matriz de rigidez do elemento com dois graus de liberdade em coordenadas locais com a introdução do método SIMP é:

$$[\mathbf{K}_l]_{\text{SIMP}} = \rho^p [\mathbf{K}_l] \quad (4.2)$$

A dedução da equação (4.2) é demonstrada em anexo. De seguida, os esforços calculados no referencial do elemento são obtidos por:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = [\mathbf{K}_l] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

A matriz de transformação de coordenadas globais em coordenadas locais é:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

e a lei de transformação de coordenadas globais para locais é dada por:

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [\mathbf{T}] \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

O vetor $\mathbf{u} = \{u_1, v_1, u_2, v_2\}^T$ representa os deslocamentos dos nós do elemento no referencial global \mathbf{OXY} .

A matriz de rigidez do elemento barra com dois graus de liberdade em coordenadas globais é:

$$[\mathbf{K}_g] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} \cos^2\alpha & \frac{AE}{L} \sin\alpha \cos\alpha & -\frac{AE}{L} \cos^2\alpha & -\frac{AE}{L} \sin\alpha \cos\alpha \\ \frac{AE}{L} \sin\alpha \cos\alpha & \frac{AE}{L} \sin^2\alpha & -\frac{AE}{L} \sin\alpha \cos\alpha & -\frac{AE}{L} \sin^2\alpha \\ -\frac{AE}{L} \cos^2\alpha & -\frac{AE}{L} \sin\alpha \cos\alpha & \frac{AE}{L} \cos^2\alpha & \frac{AE}{L} \sin\alpha \cos\alpha \\ -\frac{AE}{L} \sin\alpha \cos\alpha & -\frac{AE}{L} \sin^2\alpha & \frac{AE}{L} \sin\alpha \cos\alpha & \frac{AE}{L} \sin^2\alpha \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Por sua vez a matriz do elemento barra com dois graus de liberdade em coordenadas globais com a introdução do método SIMP é:

$$[\mathbf{K}_g]_{\text{SIMP}} = \rho^p [\mathbf{K}_g] \quad (4.7)$$

As equações (4.6) e (4.7) são obtidas a partir da seguinte lei de transformação:

$$[\mathbf{K}_g] = [\mathbf{T}]^T [\mathbf{K}_l] [\mathbf{T}] \quad (4.8)$$

As matrizes de rigidez dos elementos tanto locais como globais são apresentadas nas tabelas A.4 e A.5, para o primeiro e segundo casos de estudo, respetivamente, no Anexo I. Depois de obtidas as matrizes de rigidez globais dos elementos faz-se a assemblagem para obter a matriz de rigidez da estrutura. No Anexo I pode-se consultar a matriz de rigidez da estrutura completa

referente a cada caso de estudo. Depois de eliminadas as linhas e colunas associadas aos graus de liberdade inativos resulta para o primeiro caso de estudo (com variável área):

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \frac{A_1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{A_1}{\sqrt{2}} + A_2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

e para o segundo caso (com a variável densidade):

$$[\mathbf{K}]_{\text{SIMP}} = \begin{bmatrix} \frac{\rho_1^P}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\rho_1^P}{\sqrt{2}} + \rho_2^P \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

4.2.2 Solução

O passo seguinte é o cálculo dos deslocamentos, \mathbf{u} , devido aos casos de carga P_1 e P_2 . A solução de elementos finitos obtém-se resolvendo o sistema da equação (4.11), onde $\{\mathbf{f}\}$ é o vector de forças generalizado e $\{\mathbf{u}\}$ é o vector de deslocamentos generalizado.

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{u}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (4.11)$$

Os resultados obtidos serão apresentados para cada caso de estudo nos respetivos subcapítulos.

4.2.3 Pós-processamento

Em seguida são calculados os esforços nos vários elementos de barra. Estes podem ser calculados transformando os deslocamentos obtidos no referencial global em deslocamentos referidos ao referencial local de cada elemento, através da matriz de transformação de coordenadas \mathbf{T} , e depois multiplicando o resultado pela matriz de rigidez do elemento no referencial local, \mathbf{K}_l . Recorrendo às equações (4.3) e (4.5) aplica-se a seguinte equação:

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = [\mathbf{K}_l][\mathbf{T}] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

Em seguida procedeu-se ao cálculo da tensão nos vários elementos, aplicando a equação descrita em baixo:

$$\sigma_{ij} = \frac{f_{ij}}{A_i} \quad (4.13)$$

Aqui f_{ij} são os esforços no elemento i resultantes da aplicação do caso de carga j .

4.3 1º Caso de estudo

Neste caso de estudo, baseado em Stolpe & Svanberg (2001), será analisada a estrutura reticulada apresentada anteriormente considerando as áreas de secção das barras como variáveis de projeto. É importante referir que, como se pode observar na tabela 4.1, em Stolpe & Svanberg (2001) foi utilizado o volume das barras como variáveis de projeto, mas os resultados obtidos aqui foram os mesmos utilizando as áreas. Em Lee (2012), o autor tentou reproduzir os resultados obtidos por Stolpe & Svanberg (2001), mas devido a má interpretação daquele trabalho, assumiu que havia um erro no comprimento de duas das barras da estrutura (L_1 e L_3) ao definir a matriz de rigidez e resolveu alterar os valores dos comprimentos de $\sqrt{2}$ para 2. O autor falhou também em mencionar a função objetivo e como a obteve, o que levou a dificuldades na compreensão dos valores de densidade das barras utilizados, mas a tabela 4.1 deverá apresentar os valores realmente utilizados de acordo com uma compreensão dos resultados elaborada no âmbito desta dissertação.

Em seguida são apresentados os resultados da tensão nos elementos provenientes dos cálculos de elementos finitos. Os resultados intermédios como os deslocamentos e os esforços nos elementos são apresentados no Anexo I para cada caso. Na tabela 4.2 apresentam-se os dados relativos à estrutura considerada.

Tabela 4.2: Dados necessários à resolução dos casos de estudo.

Módulo de Young, E_{0i} [GPa]	1
Comprimento Barra 1 e 3, $L_{1,3}$ [m]	$\sqrt{2}$
Comprimento Barra 2, L_2 [m]	1
Caso de Carga 1, P_1 [N]	$\{0 \quad 1.5\}^T$
Caso de Carga 2, P_2 [N]	$\{1 \quad 0\}^T$

4.3.1 Tensão nos elementos

Recorrendo aos resultados dos cálculos intermédios dos esforços nas barras presentes no Anexo I e substituindo na equação (4.13) os valores dos esforços indicados na tabela A.6, chega-se aos seguintes resultados de tensão apresentados na tabela 4.3.

Tabela 4.3: Tensões resultantes dos esforços aplicados nos elementos barra da estrutura.

Número do elemento, i	Caso de carga, j	
	1	2
1	$\frac{0,75}{\frac{A_1}{\sqrt{2}} + A_2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}A_1}$
2	$\frac{1,5A_2}{\frac{A_1}{\sqrt{2}} + A_2}$	0
3	$\frac{0,75}{\frac{A_1}{\sqrt{2}} + A_2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}A_1}$

4.3.2 Formulação do problema de otimização

A função objetivo é a massa total da estrutura:

$$f(A_1, A_2) = \rho_1 A_1 L_1 + \rho_2 A_2 L_2 + \rho_3 A_3 L_3 \quad (4.14)$$

Para o 1º caso de estudo as variáveis de projeto são as áreas A_i de cada barra. Assume-se que $A_1 = A_3$ e pela tabela 4.2 considera-se $L_1 = L_3$. Também todas as barras têm a mesma densidade $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 1$. Simplificando a equação (4.14) obtém-se:

$$f(A_1, A_2) = 2\sqrt{2}A_1 + A_2 \quad (4.15)$$

Com a definição da função objetivo concluída procede-se à definição dos constrangimentos. Segundo Stolpe & Svanberg (2001) as tensões de cedência consideradas para este caso de estudo são $|\sigma^*_i| \leq 1$ e, portanto, os constrangimentos de tensão podem ser definidos utilizando os resultados da tabela 4.3 tendo em conta que o cálculo da tensão em cada barra pressupõe a existência da respetiva barra, ou seja, área da barra é $A > 0$. Portanto, a tensão na barra i não está definida para $A_i = 0$. Definem-se em seguida as funções g_{ij} dos constrangimentos de tensão onde o índice i identifica a barra e j o caso de carga.

Tabela 4.4: Constrangimentos de tensão dos vários elementos da estrutura.

Número do elemento, i	Caso de carga, j	
	1	2
1, 3	$g_{11} = \frac{0,75}{\frac{A_1}{\sqrt{2}} + A_2} \leq 1$ $\text{e } A_1 > 0, A_2 \geq 0.$	$g_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}A_1} \leq 1$ $\text{e } A_1 > 0, A_2 \geq 0.$
2	$g_{21} = \frac{1,5A_2}{\frac{A_1}{\sqrt{2}} + A_2} \leq 1$ $\text{e } A_2 > 0, A_1 \geq 0.$	Tensão nula.

Por fim, a equação (4.16) mostra a formulação do problema de otimização topológica de minimização de massa sujeito a constrangimentos de tensão para os dois casos de carga (formulação multicarga). No entanto, esta formulação não é completamente adequada, pois os constrangimentos de tensão são apenas impostos aqui se existir material, $A > 0$ e desaparecem para $A = 0$. Isto significa que o número de constrangimentos é dependente do estado das variáveis de projeto, se $A = 0$ ou $A > 0$.

$$\begin{aligned}
 \min_{A_1, A_2} \quad & f(A_1, A_2) = 2\sqrt{2}A_1 + A_2 \\
 \text{Sujeito a} \quad & g_{11} = \frac{0,75}{\frac{A_1}{\sqrt{2}} + A_2} - 1 \leq 0 \\
 & g_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}A_1} - 1 \leq 0 \\
 & g_{21} = \frac{1,5A_2}{\frac{A_1}{\sqrt{2}} + A_2} - 1 \leq 0
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Com $A_1, A_2 > 0$.

Segundo Verbart (2015), problemas de otimização topológica com constrangimentos de tensão pertencem a uma classe de problemas com constrangimentos dependentes do *design* (projeto). Estes problemas são conhecidos pela seguinte denominação: *Mathematical Programs with Vanishing Constraints*¹ (*MPVC's*). A dificuldade associada a este tipo de problemas é que dependendo do ponto no espaço de projeto nem todos os constrangimentos podem estar definidos.

¹ Possível tradução: ‘Programas Matemáticos com Desaparecimento de Constrangimentos’

Assim existe a necessidade de aplicar estes constrangimentos de forma independente do *design* ou do estado das variáveis de projeto. Pretende-se que todos os constrangimentos de tensão definidos sejam satisfeitos, mesmo que desapareça um elemento de barra da estrutura, ou seja, para $A = 0$. Isto assim permitirá chegar a soluções óptimas de topologia diferente da inicial. Uma forma de ultrapassar esta dificuldade utilizada por Verbart (2015) é multiplicar o constrangimento de tensão g_{ij} pela respetiva variável de projeto A_i . Neste sentido o problema de otimização pode ser reformulado conforme a equação (4.17).

Esta nova definição de constrangimento de tensão é independente do *design*, elimina a condição anterior de $A_i > 0$, porque garante-se que a solução de área nula, $A_i = 0$, verifica o constrangimento, g_{ij} .

$$\begin{aligned}
 \min_{A_1, A_2} \quad & f(A_1, A_2) = 2\sqrt{2}A_1 + A_2 \\
 \text{Sujeito a} \quad & g_{11} = A_1 \left(\frac{0,75}{\frac{A_1}{\sqrt{2}} + A_2} - 1 \right) \leq 0 \\
 & g_{12} = A_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}A_1} - 1 \right) \leq 0 \\
 & g_{21} = A_2 \left(\frac{1,5}{\frac{A_1}{\sqrt{2}} + A_2} - 1 \right) \leq 0 \\
 & \text{Com } A_1, A_2 \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

4.3.3 Projeto ótimo

No gráfico da figura 4.2 está representado o problema de otimização original formulado na equação (4.16). Observa-se na figura a região admissível a cinzento e as linhas dos constrangimentos do problema, $g_{ij} = 0$. Nesta formulação não existe domínio degenerado e a solução ótima encontra-se no ponto A . No entanto, esta formulação corresponde ao caso em que os constrangimentos de tensão são apenas impostos se existir material, $A > 0$ e desaparecem para $A = 0$. As linhas de fundo paralelas são as linhas de isocusto da função objetivo.

No gráfico da figura 4.4 é possível observar a resolução gráfica do problema de otimização da equação (4.17) que representa o caso em que todos os constrangimentos definidos são sempre satisfeitos mesmo que desapareça um elemento da estrutura. Para uma melhor compreensão do que aconteceu às funções dos constrangimentos, a figura 4.3 mostra uma janela do gráfico mais detalhada. Como se pode observar, as funções dos constrangimentos g_{11} e g_{21} , que na figura 4.2 são representadas por retas com declive negativo, na figura 4.3 são representadas

por hipérbolas, onde, em cada uma delas os pontos representados respetivamente por $F \approx (0, 0.75)$ e $C \approx (2.12, 0)$ são pontos não definidos. Estão também representados os constrangimentos g_{12} e $A_1, A_2 \geq 0$. No gráfico da figura 4.3, as áreas a sombreado são as áreas onde os constrangimentos são violados. O domínio admissível é dado pela área que não está preenchida mais o segmento de reta que vai do ponto C até ao ponto B (amarelo). Este segmento é a zona denominada de região degenerada do domínio admissível. Por sua vez, na figura 4.4, agora com a janela do gráfico mais focada apenas no primeiro quadrante, o domínio admissível do problema, é a área a cinzento mais o segmento de reta CB . É possível observar que existem duas soluções ótimas globais iguais, a solução $A = (0.71, 1)$ e $B = (1.06, 0)$, pois ambos os pontos estão sobre a mesma linha de isocusto, ou seja $f^* = 3$. Encontram-se ambas no domínio admissível, mas a solução B encontra-se na região degenerada do domínio admissível, como observado anteriormente. Como foi exposto no capítulo 2, à solução B dá-se o nome de ótimo singular. Esta região degenerada do domínio admissível é causada pela descontinuidade do constrangimento de tensão quando a área de secção é zero, que resulta do comportamento altamente não linear da tensão. É esta a principal razão que previne a maior parte dos algoritmos numéricos de chegarem a uma solução verdadeiramente ótima global, e terminam a procura numa solução sub-ótima. De maneira a aceder a este tipo de soluções é necessário recorrer a métodos de relaxamento dos constrangimentos.

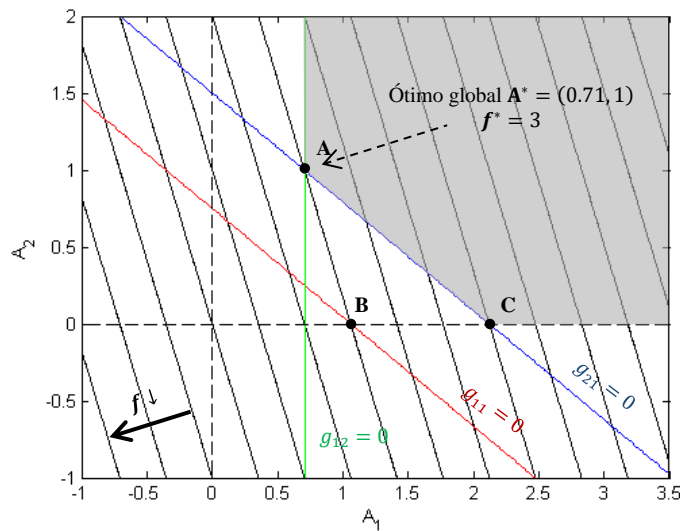


Figura 4.2: Representação gráfica do problema original de otimização topológica da estrutura reticulada de três barras.

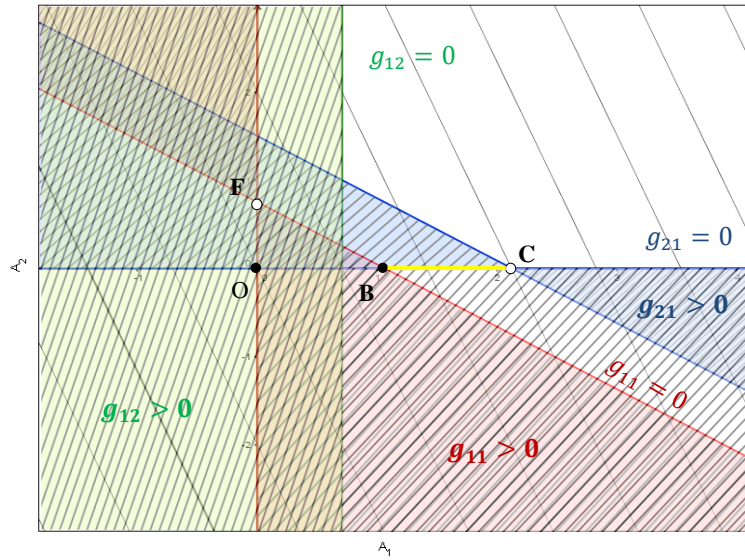


Figura 4.3: Representação gráfica de todo o domínio do problema de otimização topológica da estrutura reticulada de três barras sem relaxamento dos constrangimentos de tensão. Nesta representação os constrangimentos são independentes do *design*.

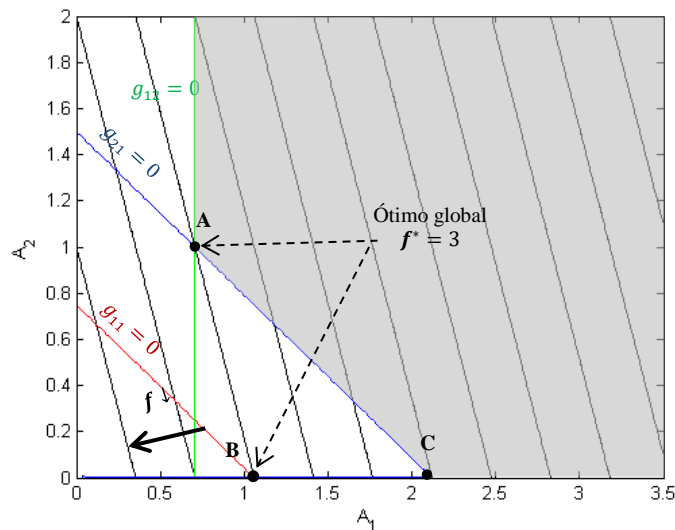


Figura 4.4: Representação gráfica do domínio admissível do problema de otimização topológica da estrutura reticulada de três barras sem relaxamento dos constrangimentos de tensão. Pormenor da figura 4.3, (primeiro quadrante).

4.3.4 Aplicação do ε -relaxation

Neste método os constrangimentos de tensão originais são perturbados por um pequeno parâmetro de relaxamento $0 < \varepsilon \ll 1$. O problema de otimização com os constrangimentos de tensão relaxados pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\min_{A_1, A_2}$$

$$f(A_1, A_2) = 2\sqrt{2}A_1 + A_2$$

Sujeito a

$$\tilde{g}_{11} = A_1 \left(\frac{0,75}{\frac{A_1}{\sqrt{2}} + A_2} - 1 \right) - \varepsilon \leq 0$$

$$\tilde{g}_{12} = A_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}A_1} - 1 \right) - \varepsilon \leq 0 \quad (4.18)$$

$$\tilde{g}_{21} = A_2 \left(\frac{1,5}{\frac{A_1}{\sqrt{2}} + A_2} - 1 \right) - \varepsilon \leq 0$$

Com $A_1, A_2 \geq 0$.

Nos gráficos das figuras apresentadas a seguir foram testados diferentes valores de ε de maneira a se poder observar na resolução gráfica como estes influenciam o relaxamento. Foram realizadas otimizações, recorrendo ao método gráfico, para os seguintes valores de $\varepsilon = \{0.01, 0.05\}$.

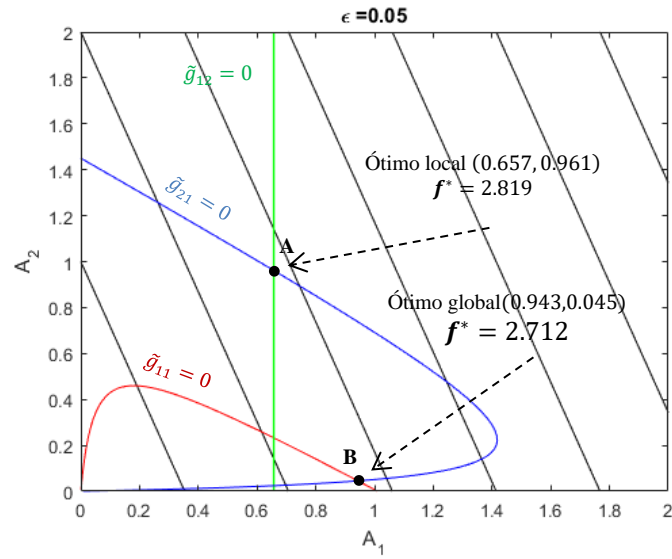


Figura 4.5: Domínio de projeto depois da aplicação do ε -relaxation ao problema ($\varepsilon = 0.05$).

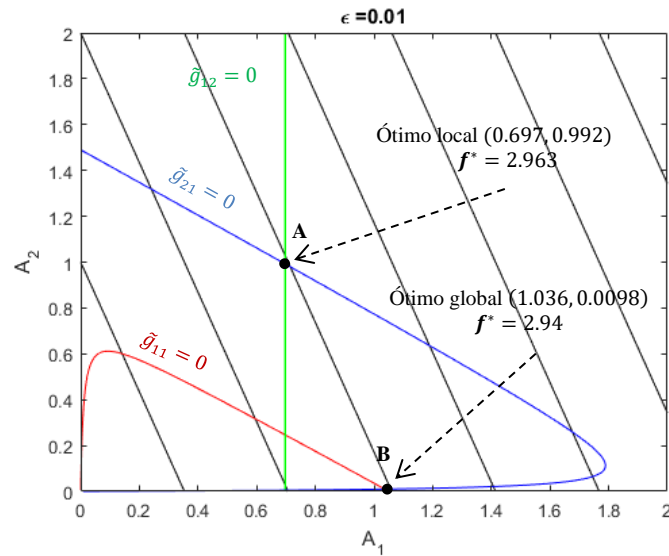


Figura 4.6: Domínio de projeto depois da aplicação do ϵ -relaxation ao problema ($\epsilon = 0.01$).

Como se pode observar, na figura 4.5 e 4.6 o relaxamento aplicado suaviza o subdomínio degenerado, fazendo com que o ótimo singular B fique acessível. No entanto, resolver o problema relaxado irá resultar numa solução ótima aproximada de B original, onde os dois constrangimentos se intersectam. À medida que o valor do parâmetro de relaxamento ϵ se aproxima de zero, o ótimo do problema aproxima-se do ótimo do problema original, B . Contudo, é importante referir que Stolpe & Svanberg (2001) demonstraram que a trajetória para o ótimo global pode ser descontínua, ou seja, a procura de um ótimo global num problema relaxado ao diminuir o parâmetro ϵ gradualmente não garante que se chegue ao verdadeiro ótimo global do problema original.

4.4 2º Caso de estudo

O 2º caso de estudo baseia-se na publicação de Bruggi (2008). Será novamente analisada a estrutura reticulada de três barras introduzida no subcapítulo 4.1 (Modelo Geométrico), mas ao contrário do 1º caso de estudo, a variável de projeto considerada será a densidade ρ . Esta alteração vem na sequência de tornar possível a comparação dos métodos de relaxamento ϵ -relaxation e qp -approach, aplicados ao mesmo problema. Devido ao facto do qp -approach ser baseado no método SIMP que, por sua vez, baseia-se na densidade variável, é necessário adaptar o problema de otimização a este método. Para tal, define-se a matriz de rigidez do elemento (\mathbf{K}_1) em função da densidade através do método SIMP com a introdução de um expoente de penalização p , conforme a equação (4.2).

Em seguida serão apresentados os resultados dos cálculos das tensões nos elementos provenientes dos cálculos de elementos finitos do problema adaptado ao SIMP, necessários para a formulação do problema de otimização.

4.4.1 Tensão nos elementos

Recorrendo aos cálculos intermédios de elementos finitos presentes no Anexo I e substituindo na equação (4.13) os valores dos esforços indicados na tabela A.6 chega-se aos seguintes resultados de tensão, apresentados na tabela 4.5.

Tabela 4.5: Tensões resultantes dos esforços aplicados nos elementos barra da estrutura.

Número do elemento, i	Caso de carga, j	
	1	2
1	$\frac{0,75\rho_1^p}{\frac{\rho_1^p}{\sqrt{2}} + \rho_2^p}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
2	$\frac{1,5\rho_2^p}{\frac{\rho_1^p}{\sqrt{2}} + \rho_2^p}$	0
3	$\frac{0,75\rho_1^p}{\frac{\rho_1^p}{\sqrt{2}} + \rho_2^p}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$

4.4.2 Formulação do problema de otimização

Para o 2º caso de estudo a função objetivo é igual à do 1º, ou seja, a massa total da estrutura, equação (4.14). Mas neste caso como se considera a densidade ρ como variável de projecto, as áreas de secção das barras assumem-se todas iguais, $A_1 = A_2 = A_3 = 1$. De modo a simplificar o problema também se consideram as densidades das barras 1 e 3 iguais, $\rho_1 = \rho_3$ e novamente pela tabela 4.2 considera-se $L_1 = L_3$. Simplificando a equação (4.14) e considerando a densidade como variável de projeto obtém-se:

$$f(\rho_1, \rho_2) = 2\sqrt{2}\rho_1 + \rho_2 \quad (4.19)$$

Segundo Bruggi (2008), as tensões de cedência consideradas para este caso têm o valor de $|\sigma_i^*| \leq 3$. Os constrangimentos de tensão podem ser definidos utilizando os resultados da tabela 4.5.

Duysinx & Bendsøe (1998) referem que, ao definir os critérios de tensão para um modelo de material definido pelo método SIMP, a variação da rigidez com a densidade toma a forma:

$$\langle E(\rho) \rangle = \rho^p E^0 \quad (4.20)$$

onde ρ representa a densidade e p o expoente de penalização maior do que 1. Como foi explicado anteriormente, o método SIMP quando aplicado gera um *design* sólido-vazio através da penalização da rigidez associada a densidades intermédias. De forma a definir um critério de tensão para este modelo com densidades intermédias é necessário propor uma relação entre as tensões locais e o limite de tensão de um dado material, assim como a densidade. Este critério de tensão tem que ser o mais simples possível e, de um ponto de vista físico, as propriedades isotrópicas de rigidez têm que se estender também ao modelo de tensão. Assume-se então, que as tensões locais sejam função do inverso do parâmetro da densidade. Finalmente, este critério deve penalizar densidades intermédias, de modo a gerar resultados de sólido/vazio.

Um método que satisfaz todos os requerimentos acima mencionados passa por assumir que as tensões locais, que deveriam ser limitadas por uma tensão de cedência, são dadas por:

$$\sigma_{ij} = \frac{\langle \sigma_{ij} \rangle}{\rho^q}, \quad (4.21)$$

onde o expoente q é um número maior que 1. O seu valor é determinado por um requisito de coerência com o critério de tensão derivado para materiais *rank-2*, nomeadamente as tensões locais permanecem finitas e diferentes de 0 a densidades nulas.

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho^p}{\rho^q} E_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl}^0 \rangle. \quad (4.22)$$

A única hipótese de escolha de q que satisfaz esta condição de coerência é $q = p$, ou seja, expoentes iguais são utilizados para a interpolação da rigidez e das tensões locais. A escolha do expoente $q > p$ leva a valores infinitos das tensões locais quando a densidade é nula. Por sua vez, a escolha de $q < p$ resulta na continuidade da tensão quando a densidade é nula, de acordo com Duysinx & Bendsøe (1998). Esta última opção simplificaria bastante o esforço computacional necessário para resolver problemas de otimização topológica com constrangimentos de tensão, mas, infelizmente, esta escolha levaria a soluções inconsistentes com a física e que poderiam levar a uma remoção artificial de material no *design* sólido-vazio.

No entanto, como demonstrado por Bruggi (2008), considerando $q = p$, tem-se:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma_{ij} = \frac{\rho^p}{\rho^q} E_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl}^0 \rangle = \sigma_{ij} = E_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl}^0 \rangle \quad (4.23)$$

que gera uma descontinuidade na imposição dos constrangimentos de tensão para densidades nulas, onde nenhum constrangimento tem que ser imposto. Para qualquer $q > p$, tem-se:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma_{ij} = \frac{\rho^p}{\rho^q} E_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl}^0 \rangle = \sigma_{ij} = \infty \quad (4.24)$$

que como referido anteriormente leva a valores infinitos das tensões locais quando a densidade é nula. Escolhendo $q < p$, tem-se:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sigma_{ij} = \frac{\rho^p}{\rho^q} E_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl}^0 \rangle = \sigma_{ij} = 0 \quad (4.25)$$

e, portanto, os mesmos constrangimentos de tensão, impostos em todo o domínio da densidade são automaticamente satisfeitos, mesmo se $\rho = 0$. Isto significa que os constrangimentos são sempre satisfeitos, a descontinuidade quando a densidade é nula é removida, e consequentemente dá-se o relaxamento da região degenerada do domínio.

Com a tensão local definida na equação (4.21) e com o critério de Von-Mises para a tensão local, conclui-se que os constrangimentos de tensão para o método SIMP, podem ser definidos como constrangimentos da tensão equivalente de Von-Mises $\langle \sigma \rangle_{eq}$:

$$\frac{\langle \sigma \rangle_{eq}}{\rho^q} \leq \sigma_1 \quad (4.26)$$

este critério prevê que as tensões máximas do material são dadas por $\langle \sigma \rangle_{eq} = \sigma_1 \rho^q$.

Definem-se na tabela seguinte, as funções g_{ij} dos constrangimentos de tensão onde o índice i identifica a barra e j o caso de carga, tendo em conta a equação (4.26) do critério de tensão utilizando o método SIMP.

Tabela 4.6: Constrangimentos de tensão dos vários elementos da estrutura utilizando o método SIMP.

Número do elemento, i	Caso de carga, j	
	1	2
1 e 3	$g_{11} = \frac{0,75\rho_1^p}{\frac{\rho_1^p}{\sqrt{2}} + \rho_2^p} \leq 3\rho_1^q$ <p>Com $0 < \rho_1 \leq 1$ e $0 \leq \rho_2 \leq 1$.</p>	$g_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 3\rho_1^q$
2	$g_{21} = \frac{1,5\rho_2^p}{\frac{\rho_1^p}{\sqrt{2}} + \rho_2^p} \leq 3\rho_2^q$ <p>Com $0 < \rho_1 \leq 1$ e $0 \leq \rho_2 \leq 1$.</p>	Tensão nula.

Finalmente, a equação (4.27) mostra a formulação do problema de otimização topológica de minimização de massa sujeito a constrangimentos de tensão para os dois casos de carga (formulação multicarga), à semelhança do que acontece no caso anterior.

$$\begin{aligned}
& \min_{\rho_1, \rho_2} & f(\rho_1, \rho_2) &= 2\sqrt{2}\rho_1 + \rho_2 \\
& \text{Sujeito a} & g_{11} &= \frac{0,75\rho_1^p}{\frac{\rho_1^p}{\sqrt{2}} + \rho_2^p} - 3\rho_1^q \leq 0 \\
& & g_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} - 3\rho_1^q \leq 0 \\
& & g_{21} &= \frac{1,5\rho_2^p}{\frac{\rho_1^p}{\sqrt{2}} + \rho_2^p} - 3\rho_2^q \leq 0 \\
& & \text{Com } 0 < \rho_1 \leq 1, 0 \leq \rho_2 \leq 1 \text{ e } q = p.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

4.4.3 Projeto ótimo

Na figura 4.7 resolve-se graficamente o problema formulado pela equação (4.27), sendo esta a versão não-relaxada deste problema. É possível observar a região admissível do problema que consiste na região a cinzento e no segmento de reta BC, e os constrangimentos de tensão definidos pelas curvas e reta a cores. O segmento de reta BC é uma região degenerada do domínio admissível que contém a solução ótima global do problema $B(0.707, 0)$ com o valor de $f^* = 2$, designada ótima singular. Nesta representação gráfica o expoente de penalização p toma o valor de 3. É, portanto, necessário recorrer a métodos de relaxamento para suavizar esta região do domínio e tornar este tipo de soluções acessíveis.

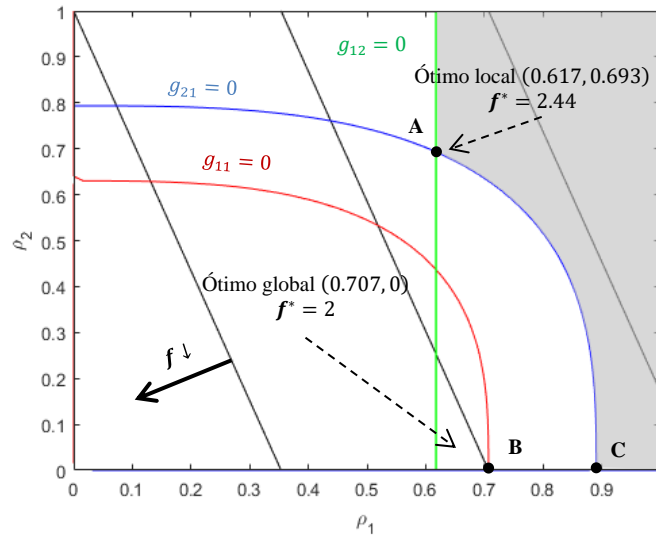


Figura 4.7: Representação gráfica do problema de otimização topológica da estrutura reticulada de três barras sem relaxamento dos constrangimentos de tensão.

4.4.4 Aplicação do ε -relaxation

Aplicando o método ε -relaxation aos constrangimentos de tensão deduzidos na tabela 4.6 e assumindo os expoentes de penalização $q = p$ de modo a que o relaxamento do problema dependa apenas do parâmetro ε , obtém-se a seguinte formulação do problema de otimização que pode ser reescrito conforme a equação (4.28).

$$\begin{aligned}
 & \min_{\rho_1, \rho_2} & f(\rho_1, \rho_2) &= 2\sqrt{2}\rho_1 + \rho_2 \\
 & \text{Sujeito a} & \tilde{g}_{11} &= \left(\frac{0,75\rho_1^p}{\frac{\rho_1^p}{\sqrt{2}} + \rho_2^p} - 3\rho_1^p \right) \rho_1 - \varepsilon \leq 0 \\
 & & \tilde{g}_{12} &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 3\rho_1^p \right) \rho_1 - \varepsilon \leq 0 \\
 & & \tilde{g}_{21} &= \left(\frac{1,5\rho_2^p}{\frac{\rho_1^p}{\sqrt{2}} + \rho_2^p} - 3\rho_2^p \right) \rho_2 - \varepsilon \leq 0
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Com $\varepsilon^2 \leq \rho_1 \leq 1$ e $\varepsilon^2 \leq \rho_2 \leq 1$ onde $\varepsilon > 0$.

Nos gráficos das figuras 4.8 e 4.9 foram escolhidos dois valores do parâmetro de relaxamento $\varepsilon = \{ 0.000001, 0.005 \}$. Como se pode observar em ambas as figuras o parâmetro de relaxamento suaviza o subdomínio degenerado do problema e na figura 4.8 observa-se que,

para o valor do parâmetro escolhido, este apresenta uma melhor aproximação ao problema original com a solução ótima do problema relaxado de $f^* = 2.023$ no ponto $B(0.707, 0.0238)$. Assim confirma-se o facto de que à medida que $\varepsilon \rightarrow 0$ o problema relaxado se aproxima do problema original.

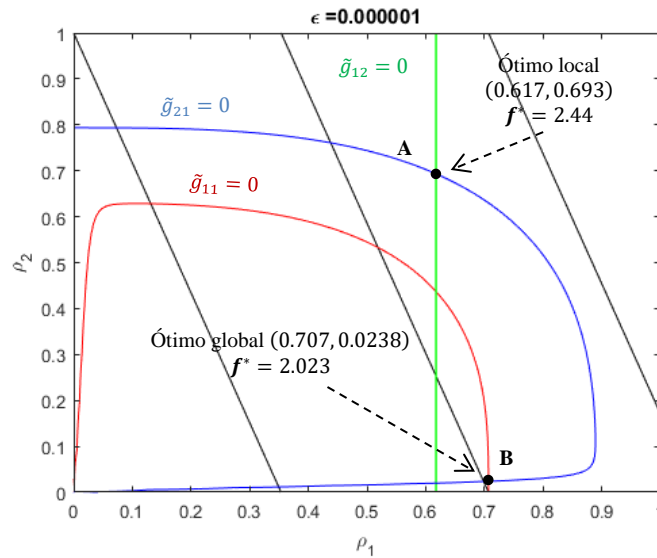


Figura 4.8: Domínio de projeto depois da aplicação do ε -relaxation ao problema. Parâmetro de relaxamento de 0.000001.

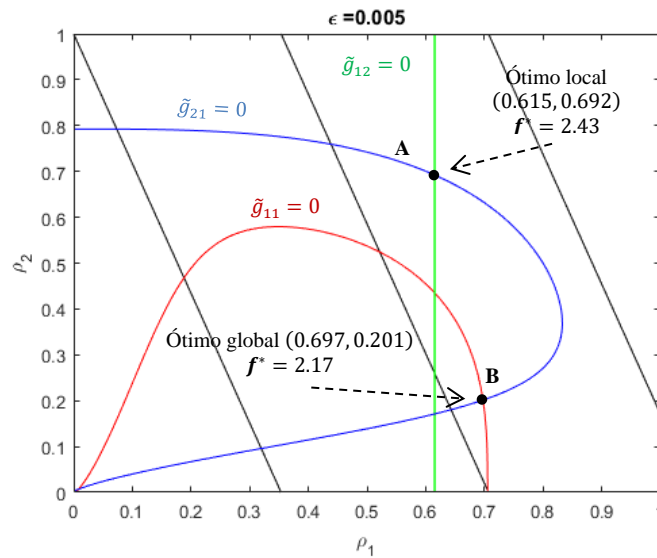


Figura 4.9: Domínio de projeto depois da aplicação do ε -relaxation ao problema. Parâmetro de relaxamento de 0,005.

4.4.5 Aplicação do *qp-approach*

As expressões necessárias para aplicação do método de relaxamento *qp-approach* foram apresentadas na tabela 4.6. Depois de deduzidas as expressões dos constrangimentos de tensão dos vários elementos da estrutura utilizando o método SIMP é possível reescrever o problema de otimização relaxado como:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\rho_1, \rho_2} & f(\rho_1, \rho_2) &= 2\sqrt{2}\rho_1 + \rho_2 \\
 & \text{Sujeito a} & \tilde{g}_{11} &= \frac{0,75\rho_1^p}{\frac{\rho_1^p}{\sqrt{2}} + \rho_2^p} - 3\rho_1^q \leq 0 \\
 & & \tilde{g}_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} - 3\rho_1^q \leq 0 \\
 & & \tilde{g}_{21} &= \frac{1,5\rho_2^p}{\frac{\rho_1^p}{\sqrt{2}} + \rho_2^p} - 3\rho_2^q \leq 0
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Com $0 < \rho_1 \leq 1$ e $0 \leq \rho_2 \leq 1$ onde $q < p$.

Aqui $q < p$, e através do parâmetro q será controlado o relaxamento do problema. Como referido anteriormente, este método não necessita que os constrangimentos de tensão estejam apenas impostos na presença de material ($\rho > 0$), devido ao facto de que o critério de tensão deduzido para o método SIMP, quando os expoentes de penalização obedecem a $q < p$, as expressões dos constrangimentos de tensão deduzidas e impostas em todo o intervalo da densidade são automaticamente satisfeitas, mesmo quando $\rho = 0$. Isto significa que os constrangimentos são sempre satisfeitos, a descontinuidade quando a densidade é nula é removida e, conseqüentemente, existe um alargamento do domínio degenerado resultado da escolha de $q < p$.

Como se pode observar pelas figuras 4.10 e 4.11, o *qp-approach* tem um efeito semelhante ao ε -relaxation no relaxamento do subdomínio degenerado do problema. À medida que o parâmetro $q \rightarrow p$ o domínio admissível relaxado aproxima-se do domínio original e o ponto ótimo do problema relaxado aproxima-se do ótimo do problema original.

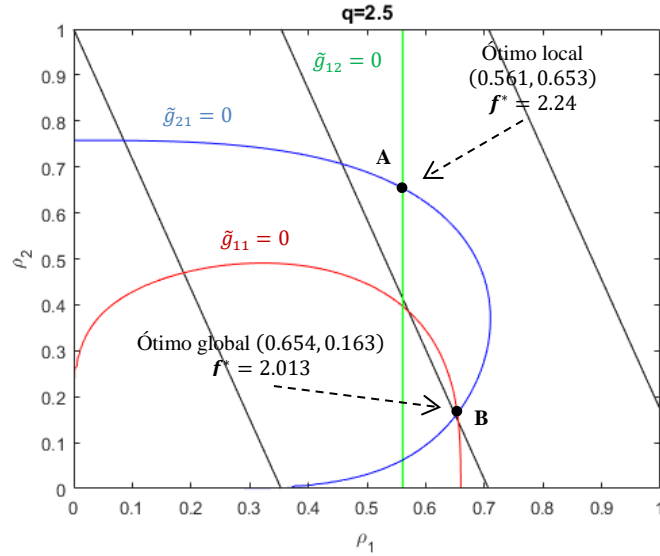


Figura 4.10: Domínio de projeto depois da aplicação do *qp-approach* ao problema. Parâmetro de relaxamento de 2.5.

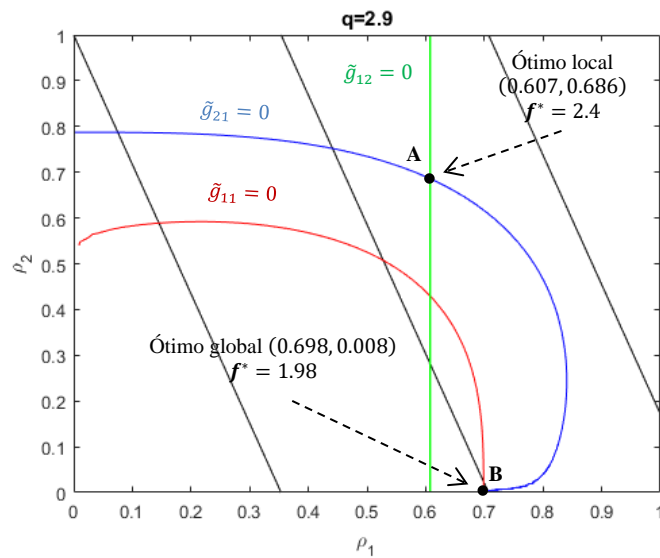


Figura 4.11: Domínio de projeto depois da aplicação do *qp-approach* ao problema. Parâmetro de relaxamento de 2.9.

4.5 Comparação de resultados ótimos com e sem relaxamento

Nesta secção serão apresentados e comparados os resultados do problema original e do problema com a aplicação dos métodos de relaxamento ε -relaxation e *qp-approach*. Os resultados de ambos os métodos são comparados quanto ao desvio dos resultados ótimos do problema original de acordo com:

$$\text{Desvio}[\%] = \frac{f_{\text{relaxado}}^* - f^*}{f^*} \times 100 \quad (4.30)$$

4.5.1 Comparação dos resultados do 1º caso de estudo

A comparação de resultados entre os valores ótimos do problema original e do problema relaxado pelo ε -relaxation são apresentados nas tabelas 4.8 e 4.9.

Tabela 4.7: Comparação de resultados entre os valores ótimos A e B do problema original e do problema relaxado através do ε -relaxation para $\varepsilon = 0.05$.

Pontos	Prob. Original	ε -relaxation $\varepsilon = 0.05$	Desvio[%]
A	3	2.819	6
B	3	2.72	9.33

Tabela 4.8: Comparação de resultados entre os valores ótimos A e B do problema original e do problema relaxado através do ε -relaxation para um $\varepsilon = 0.01$.

Pontos	Prob. Original	ε -relaxation $\varepsilon = 0.01$	Desvio[%]
A	3	2.963	1.23
B	3	2.94	2

4.5.2 Comparação dos resultados do 2º caso de estudo

A comparação de resultados entre os valores ótimos do problema original e do problema relaxado pelo ε -relaxation são apresentados nas tabelas 4.10 e 4.11, e do problema relaxado pelo qp -approach são apresentados nas tabelas 4.12 e 4.13.

Tabela 4.9: Comparação de resultados entre os valores ótimos A e B do problema original e do problema relaxado através do ε -relaxation para um $\varepsilon = 0.005$.

Pontos	Prob. Original	ε -relaxation $\varepsilon = 0.005$	Desvio[%]
A	2.44	2.43	0,41
B	2	2.17	8.5

Tabela 4.10: Comparação de resultados entre os valores ótimos A e B do problema original e do problema relaxado através do ε -relaxation para um $\varepsilon = 0.000001$.

Pontos	Prob. Original	ε -relaxation $\varepsilon = 0.000001$	Desvio[%]
A	2.44	2.44	0
B	2	2.023	1.15

Tabela 4.11: Comparação de resultados entre os valores ótimos A e B do problema original e do problema relaxado através do qp -approach para um $q = 2.5$.

Pontos	Prob. Original	qp -approach $q = 2.5$	Desvio[%]
A	2.44	2.24	8.19
B	2	2.013	0.65

Tabela 4.12: Comparação de resultados entre os valores ótimos A e B do problema original e do problema relaxado através do qp -approach para um $q = 2.9$.

Pontos	Prob. Original	qp -approach $q = 2.9$	Desvio[%]
A	2.44	2.4	1.63
B	2	1.98	1

4.6 Comparação entre os métodos de relaxamento

De forma a comparar o efeito de relaxamento do ε -relaxation e do qp -approach Verbart (2015) propôs escrever os dois constrangimentos relaxados da mesma forma:

$$\tilde{g} = \frac{|\sigma_{VM}|}{\sigma_{ced}} - \alpha(\rho; \varepsilon) \leq 0 \quad (4.31)$$

Onde α pode ser interpretado como a perturbação feita ao domínio admissível por parte dos métodos de relaxamento, que depende variável de projecto densidade ρ e do parâmetro de relaxamento ε . Este ε representa o parâmetro de relaxamento do ε -relaxation e do qp -approach. O parâmetro α para ε -relaxation e qp -approach pode ser formulado da seguinte maneira:

ε -relaxation:

$$\alpha = 1 + \frac{\varepsilon}{\rho} - \varepsilon \quad (4.32)$$

qp -approach:

$$\alpha = \rho^{-(p-q)} \quad (4.33)$$

A equação (4.32) baseia-se numa variação do ε -relaxation apresentada na equação (2.6). A equação (4.33) baseia-se nas equações dos constrangimentos da equação (4.29).

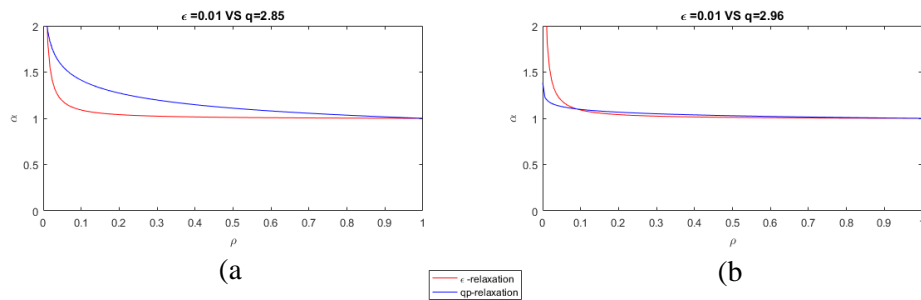


Figura 4.12: a) Comparação do relaxamento para valores de $\varepsilon = 0.01$ e $q = 2.85$. b) Comparação do relaxamento para valores de $\varepsilon = 0.01$ e $q = 2.96$.

Na Fig. 4.12 observa-se o efeito de ambos os métodos de relaxamento de tensão. Foram escolhidos, para o parâmetro ε o valor de 0.01, e para o parâmetro q os valores 2.96 e 2.85. A escolha destes valores baseou-se nos valores escolhidos por Verbart (2015) para a mesma comparação. A diferença entre ambos os métodos está no facto de o ε -relaxation perturbar o constrangimento principalmente na zona de densidade nula do problema enquanto que o qp -approach perturba o constrangimento ao longo de toda a extensão da densidade. Em conclusão, o qp -approach relaxa o constrangimento de uma forma mais suave em comparação com o ε -relaxation. Em relação ao qp -approach este facto é benéfico em otimizações baseadas no gradiente.

5 Estudo de convergência de malha

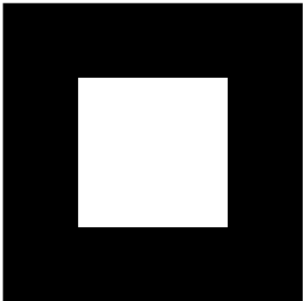
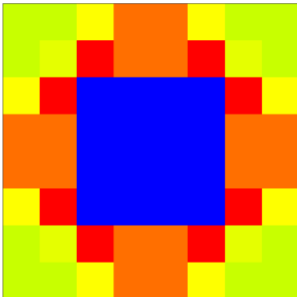
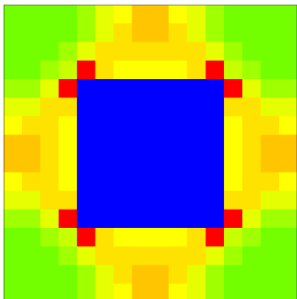
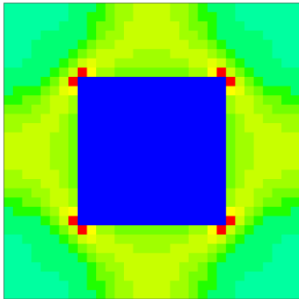
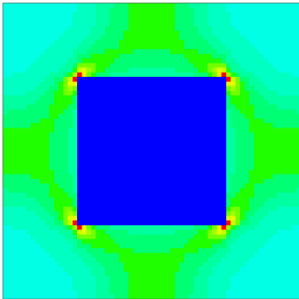
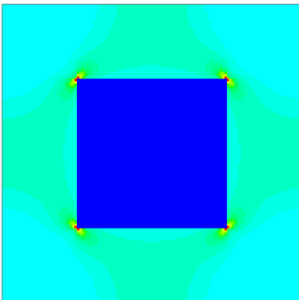
5.1 Análise de geometrias pré-definidas

5.1.1 Caso hidrostático – Furo quadrado

Neste caso a célula unitária tem um furo quadrado. O domínio vazio representa 25% ($\rho = 0$), sendo que os restantes 75% representam o domínio sólido ($\rho = 1$). É aplicado um carregamento hidrostático, apresentado na tabela 3.1, e posteriormente é analisado o campo de tensões para diferentes discretizações da célula unitária.

Na tabela 5.1 é apresentada a geometria estudada. São também apresentados os campos de tensão para as várias discretizações. Como se pode observar pelas imagens da tabela, a tensão tende a concentrar-se em dois elementos em torno de cada vértice do furo independentemente da discretização da malha. Este fenómeno que se caracteriza por um pico de tensão num pequeno número de elementos nos cantos da malha, representa uma singularidade. É possível observá-la no gráfico da figura 5.2b, onde é representada a tensão equivalente máxima $\sigma_{\text{máx}}$, que aumenta à medida que se aumenta a discretização da malha, portanto, a tensão não é convergente. Na figura 5.2a, observa-se o gráfico da energia de deformação S , tanto a análise com elementos de 8 nós como de 20 nós convergem monotonamente para um valor exato à medida que a malha é discretizada.

Tabela 5.1: Geometria da célula unitária com furo quadrado com as diferentes discretizações da malha e os respectivos campos de tensão [Pa].

Geometria	Campo de Tensões	
	8×8	 <ul style="list-style-type: none"> .284E-09 101276 202552 303829 405105 506381 607657 708933 810210 911486 .101E+07 .111E+07 .122E+07 .132E+07 .142E+07 .152E+07 .162E+07 .172E+07 .182E+07 .192E+07 .203E+07 .213E+07
	16×16	 <ul style="list-style-type: none"> .292E-09 123390 246781 370171 493562 616952 740343 863733 987124 .111E+07 .123E+07 .136E+07 .148E+07 .160E+07 .173E+07 .185E+07 .197E+07 .210E+07 .222E+07 .234E+07 .247E+07 .259E+07
	32×32	 <ul style="list-style-type: none"> .295E-09 157576 315152 472729 630305 787881 945457 .110E+07 .126E+07 .142E+07 .158E+07 .173E+07 .189E+07 .205E+07 .221E+07 .236E+07 .252E+07 .268E+07 .284E+07 .299E+07 .315E+07 .331E+07
	64×64	 <ul style="list-style-type: none"> .297E-09 206671 413343 620014 826686 .103E+07 .124E+07 .145E+07 .165E+07 .186E+07 .207E+07 .227E+07 .248E+07 .269E+07 .289E+07 .310E+07 .331E+07 .351E+07 .372E+07 .393E+07 .413E+07 .434E+07
	128×128	 <ul style="list-style-type: none"> .298E-09 275400 550800 826200 .110E+07 .138E+07 .165E+07 .193E+07 .220E+07 .248E+07 .275E+07 .303E+07 .330E+07 .358E+07 .386E+07 .413E+07 .441E+07 .468E+07 .496E+07 .523E+07 .551E+07 .578E+07

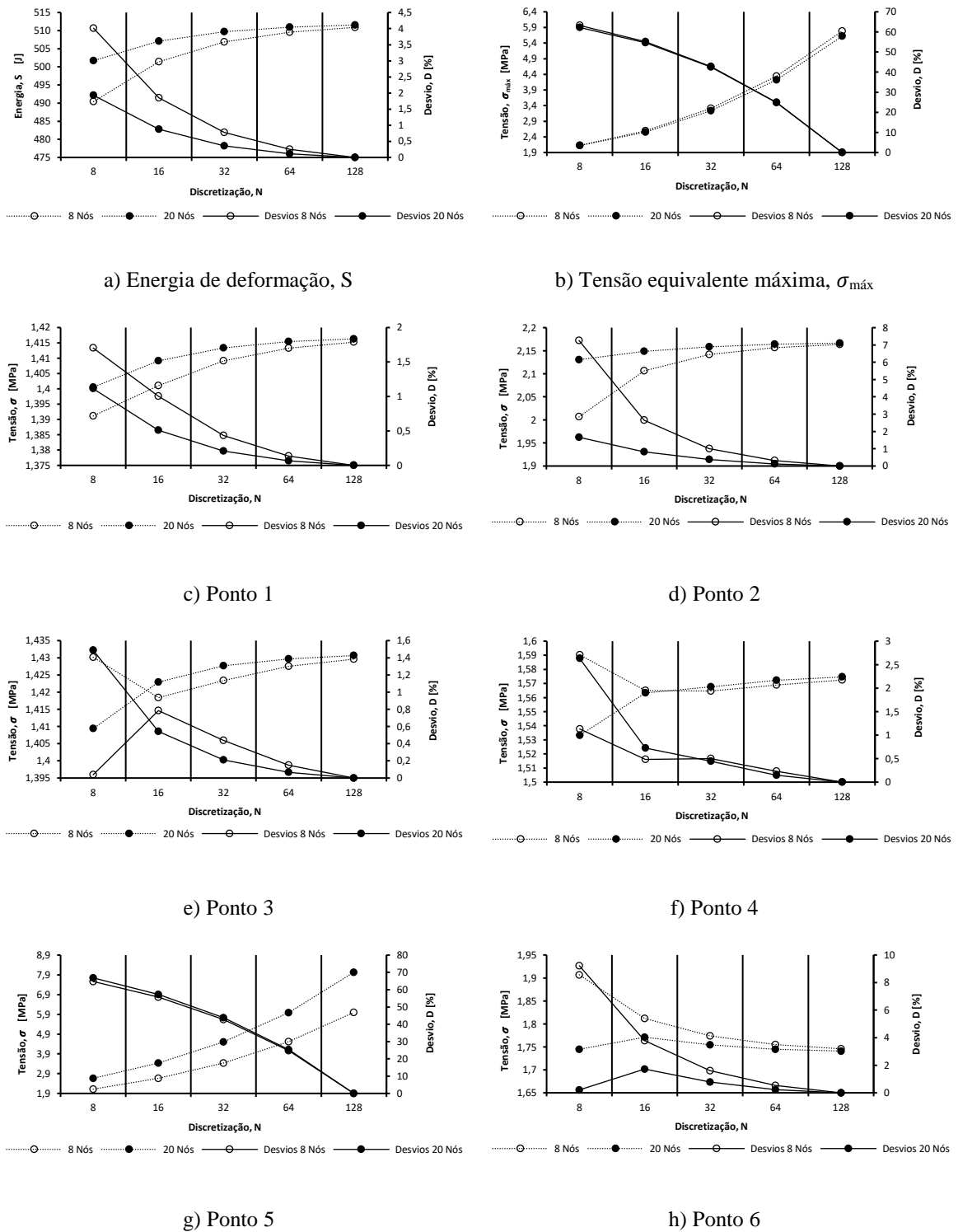


Figura 5.1: Estudo de convergência de malha para o caso hidrostático numa célula unitária com furo quadrado: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão lida no ponto 1, d) Tensão lida no ponto 2, e) Tensão lida no ponto 3, f) Tensão lida no ponto 4, g) Tensão lida no ponto 5, h) Tensão lida no ponto 6. Desvio calculado pela equação (3.1).

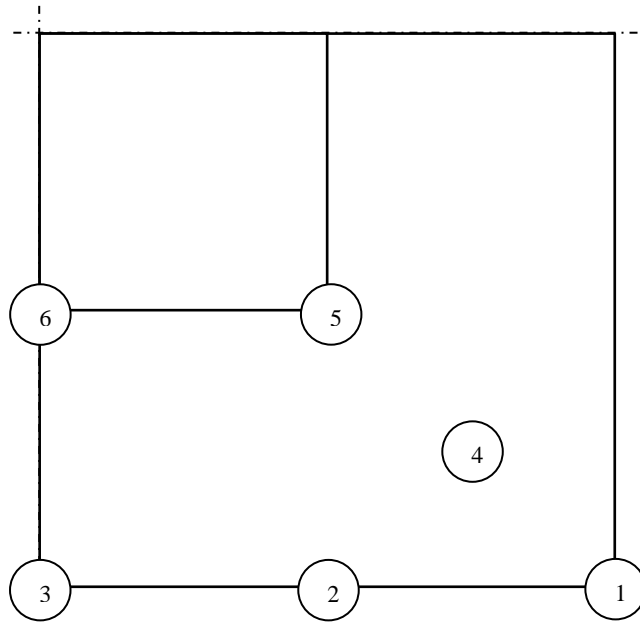


Figura 5.2: Representação de 1/4 da célula unitária com furo quadrado. Localização dos nós onde a tensão é lida.

Nos gráficos que dizem respeito à tensão lida nos nós, figura 5.2c até 5.2h, os nós estão identificados na figura 5.1, é possível observar nos pontos 1, 2, 3, 4 e 6 a convergência dos valores da tensão à medida que a discretização da malha aumenta. No entanto, em alguns pontos essa convergência não é tão evidente, como se observa nos pontos 3, 4 e 6. Nestes pontos existem flutuações quando são utilizados elementos de 8 nós, mas verifica-se uma convergência mais suave nos elementos de 20 nós. Especificamente no ponto 6, observa-se na tabela 5.1 a tensão a convergir, mas as aproximações são sobrestimadas. Destaca-se também a melhor aproximação com a utilização de elementos de 20 nós, que se caracteriza pelo menor desvio entre as várias discretizações.

5.1.2 Caso hidrostático – Furo circular com fração volúmica de 50%

Neste caso, a geometria do furo depende da discretização da malha, isto é, à medida que a discretização aumenta aproxima-se da circunferência do furo. Esta geometria é obtida através de uma rotina no programa FORTRAN que distribui elementos com densidade $\rho = 1$ acima de um valor do raio do furo que depende da fração volúmica. Nesta célula a fração volúmica é de aproximadamente 50% pois com os elementos quadrangulares utilizados é impossível modelar um furo perfeitamente circular, existe sempre um excesso ou escassez de material em relação à fração volúmica pretendida. À semelhança do caso anterior, o furo representa a área vazia ($\rho = 0$) e a periferia o domínio a cheio ($\rho = 1$). Neste caso também é aplicado um carregamento hidrostático, apresentado na tabela 3.1.

Na tabela 5.2 estão representadas as diferentes discretizações de malha para o caso do furo circular. Também é possível observar na tabela os campos de tensão correspondentes a cada uma das discretizações. À semelhança do que acontece caso anterior, aqui a tensão concentra-se em elementos localizados na fronteira sólido/vazio da célula, mais especificamente nos vértices formados pelos elementos e à medida que a discretização aumenta os níveis de tensão mais elevados tornam-se bastante pontuais, como no caso de singularidades, vejam se as discretizações de 32×32 , 64×64 e 128×128 .

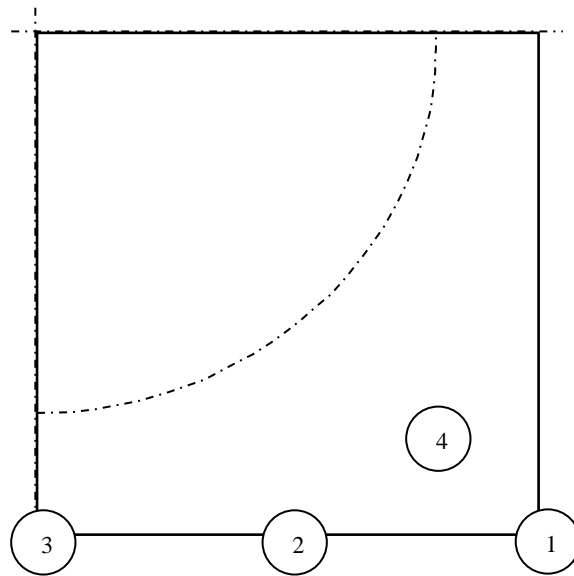
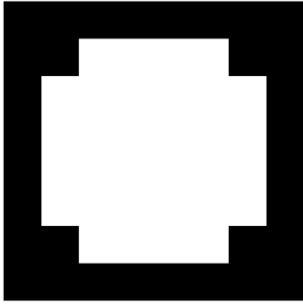
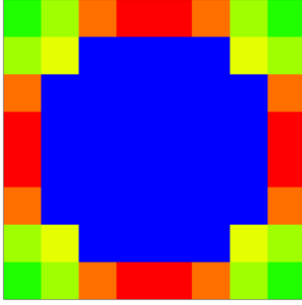
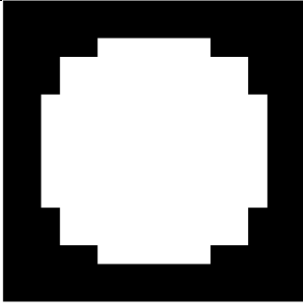
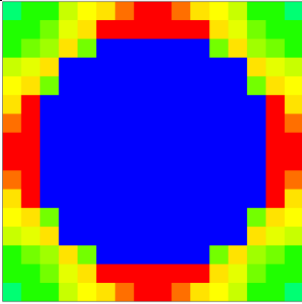
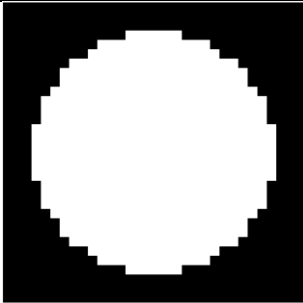
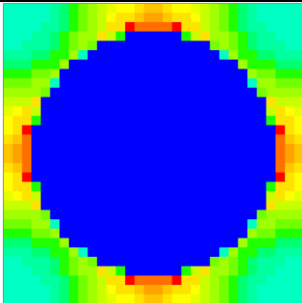
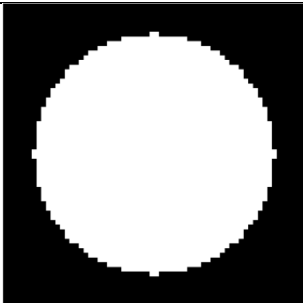
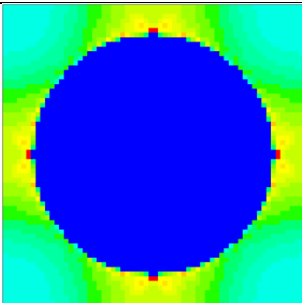
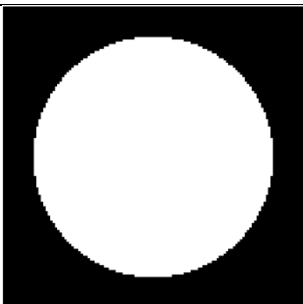
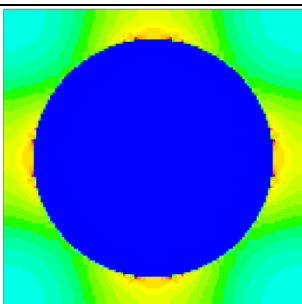


Figura 5.3: Representação de 1/4 da célula unitária com furo redondo. O arco da figura representa a aproximação da célula ao furo redondo com fração volúmica de 50%. Localização dos pontos onde a tensão é lida.

Nas figuras 5.4a a 5.4f está representado o estudo de convergência de malha da célula unitária com furo circular. Em todos os gráficos da figura é possível observar inconsistência dos resultados. Este facto deve-se principalmente à diferença das geometrias à medida que se aumenta a discretização da malha e por isso em cada discretização a fração volúmica também não é exatamente igual a 50%. Assim, os resultados de tensão lidos tanto nos elementos como nos nós podem não ser consistentes, observando-se oscilações nos valores apresentados nos gráficos. Neste caso existe erro de modelação misturado com o erro de discretização. As tensões presentes na figura 5.4c, 5.4d, 5.4e e 5.4f remetem, respetivamente, para os pontos 1, 2, 3 e 4 assinalados na figura 5.3. Foram escolhidos estes pontos de modo a garantir a sua posição constante ao longo das diferentes discretizações da malha e alterações da geometria.

Tabela 5.2: Geometria da célula unitária para o caso do furo circular com fração volúmica de 50% para cada discretização da malha e os respectivos campos de tensão [Pa].

Geometria		Campo de Tensões
	8×8	 <div data-bbox="1174 371 1286 674"> <p>.416E-09 190010 380019 570029 760038 950048 .114E+07 .133E+07 .152E+07 .171E+07 .190E+07 .209E+07 .228E+07 .247E+07 .266E+07 .285E+07 .304E+07 .323E+07 .342E+07 .361E+07 .380E+07 .399E+07</p> </div>
	16×16	 <div data-bbox="1174 689 1286 992"> <p>.405E-09 194400 388800 583200 777600 972000 .117E+07 .136E+07 .156E+07 .175E+07 .194E+07 .214E+07 .233E+07 .253E+07 .272E+07 .292E+07 .311E+07 .330E+07 .350E+07 .369E+07 .389E+07 .408E+07</p> </div>
	32×32	 <div data-bbox="1174 1008 1286 1310"> <p>.423E-09 269252 538505 807757 .108E+07 .135E+07 .162E+07 .188E+07 .215E+07 .242E+07 .269E+07 .296E+07 .323E+07 .350E+07 .377E+07 .404E+07 .431E+07 .458E+07 .485E+07 .512E+07 .539E+07 .565E+07</p> </div>
	64×64	 <div data-bbox="1174 1326 1286 1628"> <p>.386E-09 308886 617771 926657 .124E+07 .154E+07 .185E+07 .216E+07 .247E+07 .278E+07 .309E+07 .340E+07 .371E+07 .402E+07 .432E+07 .463E+07 .494E+07 .525E+07 .556E+07 .587E+07 .618E+07 .649E+07</p> </div>
	128×128	 <div data-bbox="1174 1644 1286 1946"> <p>.366E-09 294900 589800 884700 .118E+07 .147E+07 .177E+07 .206E+07 .236E+07 .265E+07 .295E+07 .324E+07 .354E+07 .383E+07 .413E+07 .442E+07 .472E+07 .501E+07 .531E+07 .560E+07 .590E+07 .619E+07</p> </div>

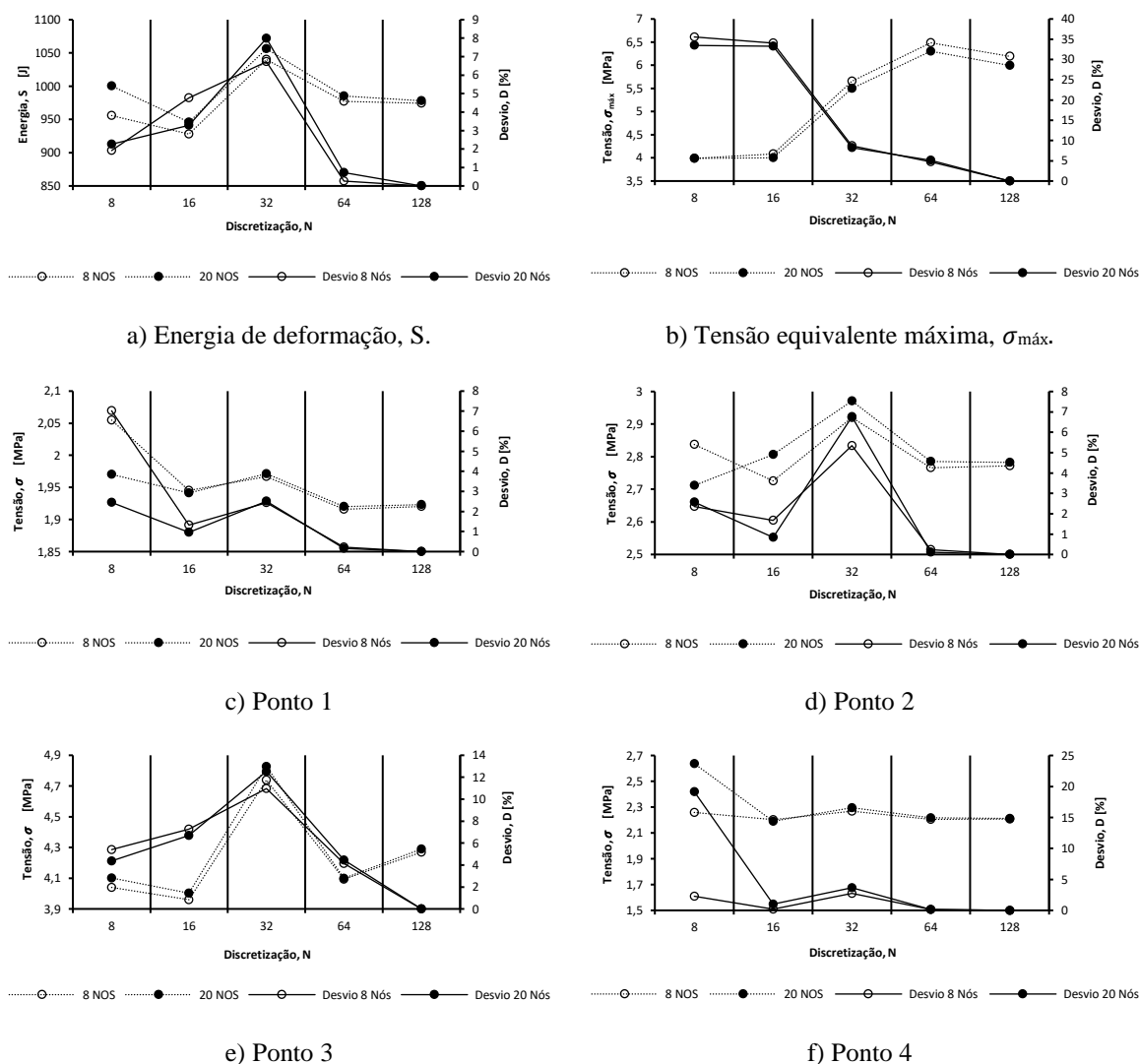


Figura 5.4: Estudo de convergência de malha para o caso hidrostático numa célula unitária com furo redondo com fração volúmica de 50%: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão lida no ponto 1, d) Tensão lida no ponto 2, e) Tensão lida no ponto 3, f) Tensão lida no ponto 4. Desvio calculado pela equação (3.1).

5.1.3 Caso hidrostático – Furo circular com fração volúmica de 80%

O caso do furo circular com fração volúmica de 80% é muito semelhante ao caso apresentado anteriormente. As mesmas dificuldades encontradas no caso anterior também estão presentes neste, como o erro de modelação do furo circular que depende das várias discretizações consideradas e o facto de se utilizarem elementos hexaedros para modelar o furo. Esta geometria é obtida através do mesmo processo do caso anterior, alterando apenas a parcela da fração volúmica para 80%. Nesta geometria a fração volúmica em cada discretização também é aproximada pela mesma razão do caso anterior. Também é aplicado um carregamento hidrostático e são analisados os campos de tensão.

Na tabela 5.3 observam-se as geometrias obtidas para cada discretização assim como os respectivos campos de tensão. Na discretização mais baixa (8×8) observam-se picos de tensão que vão evoluindo com cada discretização da malha. O aparecimento destes picos deve-se ao facto de serem utilizados elementos hexaedros para modelar a geometria de uma placa com um furo, sendo que estes elementos irão sempre criar reentrâncias na geometria do furo que por sua vez estão na origem de singularidades. No gráfico da figura 5.5b apresenta-se a tensão equivalente máxima analisada em toda a geometria. Neste gráfico a tensão é divergente o que confirma a presença de singularidades no campo de tensões. Quanto à energia de deformação, observa-se no gráfico da figura 5.5a à medida que as geometrias se tornam mais comparáveis, a partir da discretização 32×32 , nota-se alguma convergência da curva. A convergência é decrescente e sobrestima o valor da energia de deformação, o que pode ser explicado pelas diferenças das geometrias devido às diferentes discretizações.

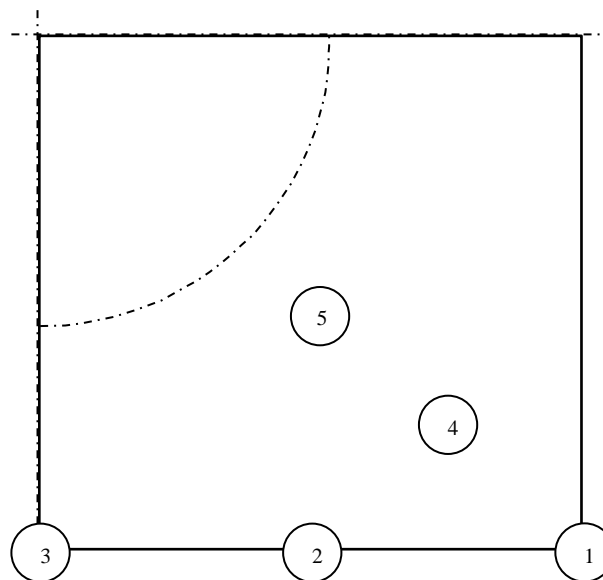
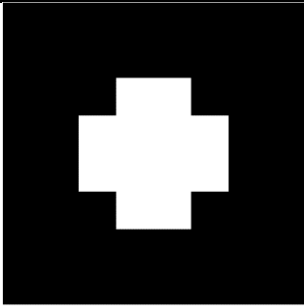
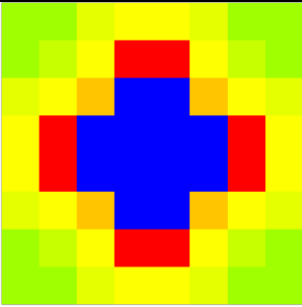
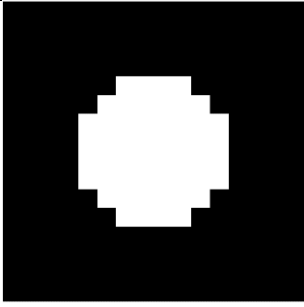
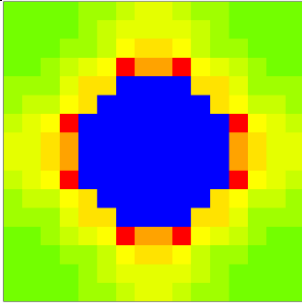
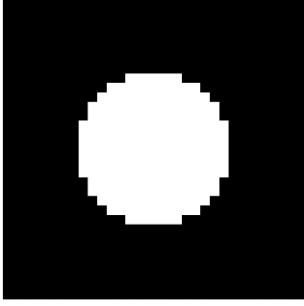
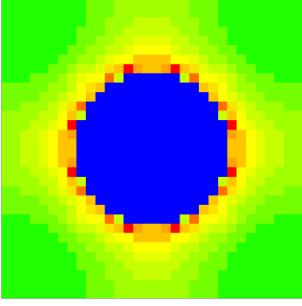
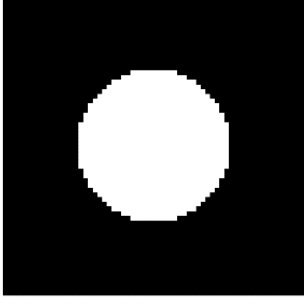
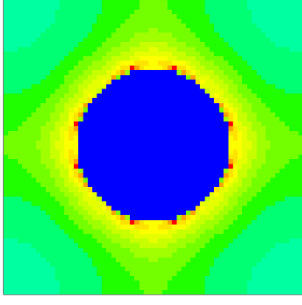
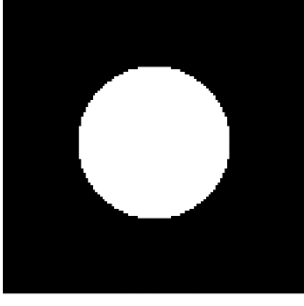
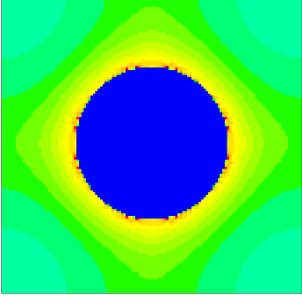


Figura 5.5: Representação de 1/4 da célula unitária com furo circular. O arco da figura representa a aproximação da célula ao furo redondo com fração volúmica de 80%. Localização dos pontos onde a tensão é lida.

Nos restantes gráficos, da figura 5.6c a 5.6g, apresentam-se os nós onde foram lidas as tensões e a sua localização encontra-se representada na figura 5.5. Em todos estes nós é possível verificar algo em comum uns com os outros a partir da discretização de 32×32 . Repare-se que a partir desta discretização é possível notar uma ligeira convergência da tensão em todos os gráficos dos nós. A razão para este acontecimento poderá estar no facto de, à medida que a discretização aumenta as singularidades do campo de tensão afastam-se cada vez mais destes nós o que faz com que não afetem a tensão lida. Como seria expectável, os valores da tensão lidos naqueles nós específicos no caso de 80% são mais estáveis por estarem mais afastados do furo quando comparado com o caso de 50%.

Tabela 5.3: Geometria da célula unitária para o caso do furo circular com fração volumica de 80% para cada discretização da malha e os respectivos campos de tensão [Pa].

Geometria		Campo de Tensões
	8×8	 <div data-bbox="1251 367 1362 672"> <p>.271E-09 97255.9 194512 291768 389024 486280 583536 680791 778047 875303 972559 .107E+07 .117E+07 .126E+07 .136E+07 .146E+07 .156E+07 .165E+07 .175E+07 .185E+07 .195E+07 .204E+07</p> </div>
	16×16	 <div data-bbox="1251 689 1362 994"> <p>.232E-09 113591 227182 340773 454364 567955 681546 795136 908727 .102E+07 .114E+07 .125E+07 .136E+07 .148E+07 .159E+07 .170E+07 .182E+07 .193E+07 .204E+07 .216E+07 .227E+07 .239E+07</p> </div>
	32×32	 <div data-bbox="1251 1012 1362 1317"> <p>.217E-09 124612 249224 373836 498448 623060 747672 872284 996896 .112E+07 .125E+07 .137E+07 .150E+07 .162E+07 .174E+07 .187E+07 .199E+07 .212E+07 .224E+07 .237E+07 .249E+07 .262E+07</p> </div>
	64×64	 <div data-bbox="1251 1335 1362 1639"> <p>.223E-09 141535 283070 424605 566140 707675 849210 990745 .113E+07 .127E+07 .142E+07 .156E+07 .170E+07 .184E+07 .198E+07 .212E+07 .226E+07 .241E+07 .255E+07 .269E+07 .283E+07 .297E+07</p> </div>
	128×128	 <div data-bbox="1251 1657 1362 1962"> <p>.217E-09 143226 286452 429677 572903 716129 859355 .100E+07 .115E+07 .129E+07 .143E+07 .158E+07 .172E+07 .186E+07 .201E+07 .215E+07 .229E+07 .243E+07 .258E+07 .272E+07 .286E+07 .301E+07</p> </div>

Estudo de convergência de malha

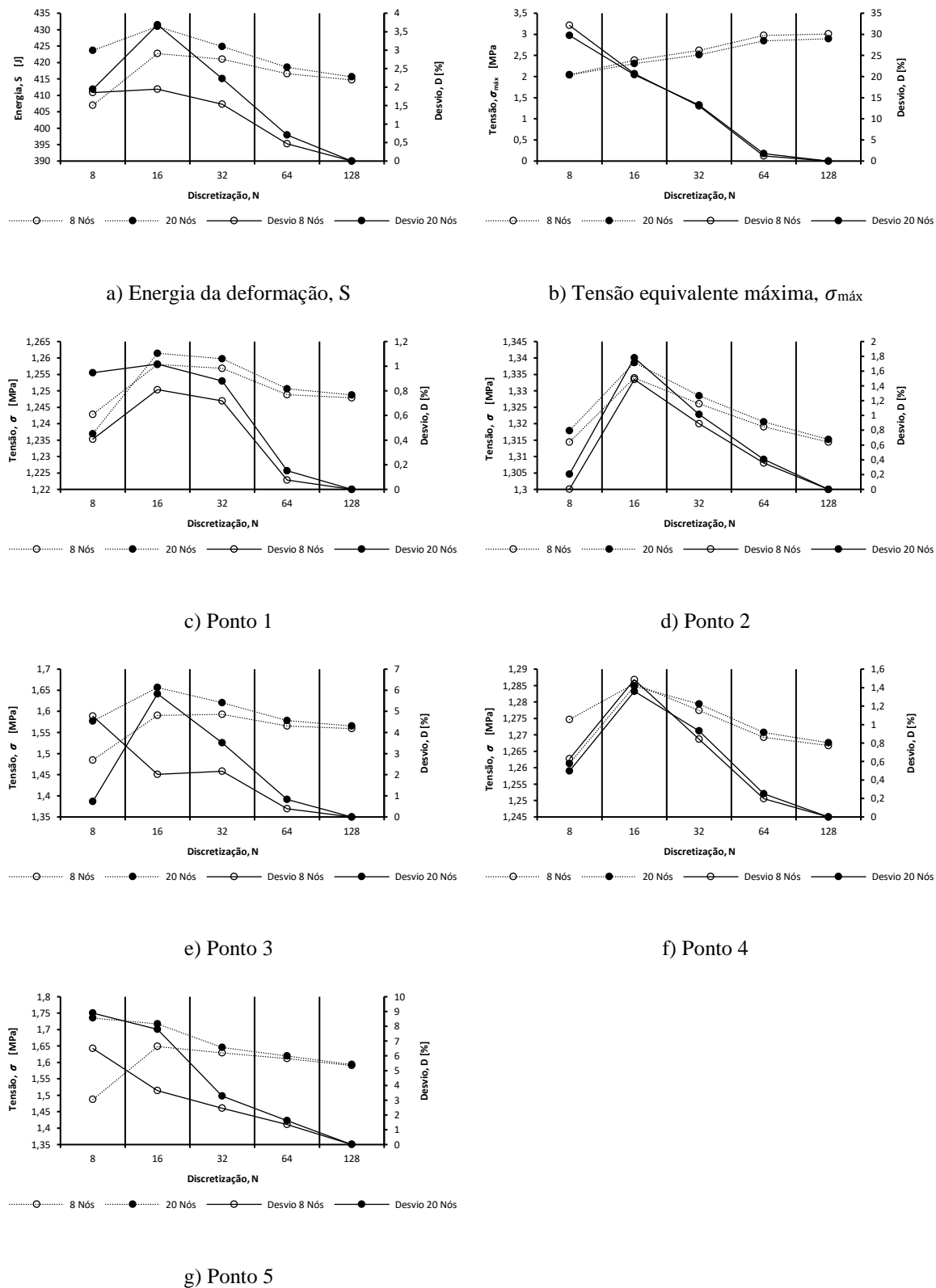


Figura 5.6: Estudo de convergência de malha para o caso hidrostático numa célula unitária com furo circular com fração volúmica de 80%: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão lida no ponto 1, d) Tensão lida no ponto 2, e) Tensão lida no ponto 3, f) Tensão lida no ponto 4, g) Tensão lida no ponto 5. Desvio calculado pela equação (3.1).

5.1.4 Caso hidrostático – Furo circular com malha não-quadrangular e fração volúmica de 50%

O caso seguinte consiste na célula unitária com furo circular com malha não-quadrangular. Neste caso a geometria é modelada em elementos finitos de modo a que não existam alterações na geometria do furo à medida que se aumenta a discretização da malha. Desta maneira os resultados da análise do campo de tensões em cada discretização são mais comparáveis. Procedendo desta forma garante-se que não existem erros de modelação que possam comprometer os resultados da análise de convergência de malha. As diferentes malhas geradas possuem diferenças das malhas estruturadas utilizadas nos casos anteriores. A malha neste caso foi apenas gerada com elementos de 8 nós. A célula tem uma fração volúmica de 50% e está sujeita a um carregamento hidrostático.

A geometria da célula unitária e os campos de tensões das várias discretizações são apresentados na tabela 5.4. Nesta tabela observa-se que o campo de tensões é aproximadamente constante em todas as discretizações. Ao contrário do que se passa nos casos anteriores, a tensão máxima neste caso afeta uma zona da célula e não elementos individuais. Estas zonas onde a tensão é máxima e que afetam vários elementos designam-se por concentrações de tensão. Estas concentrações de tensão surgem na fronteira sólido/vazio da célula unitária.

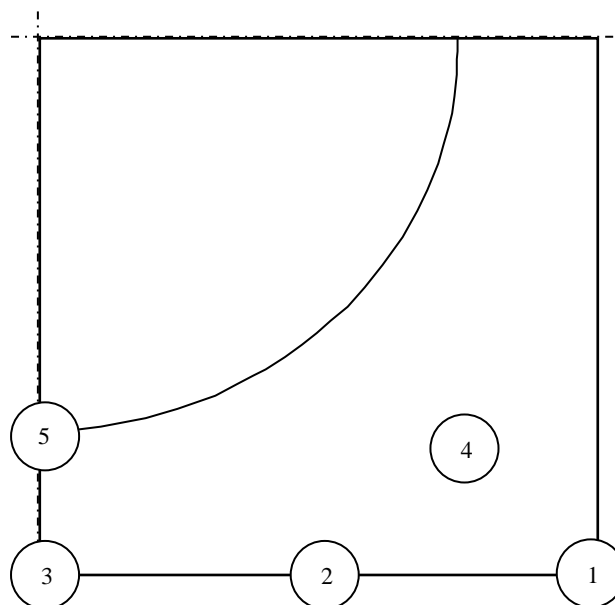
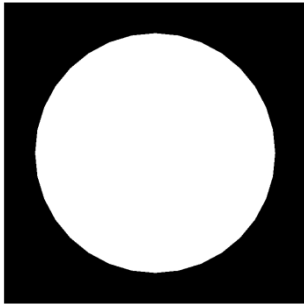
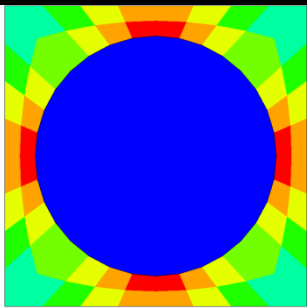
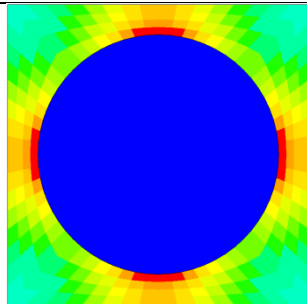
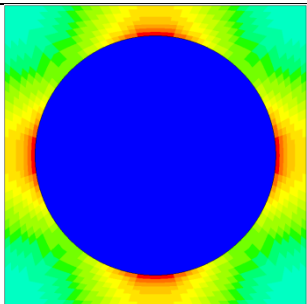
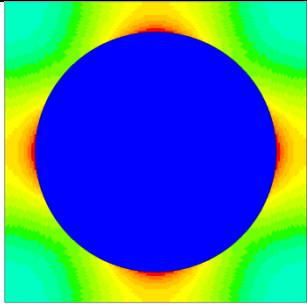
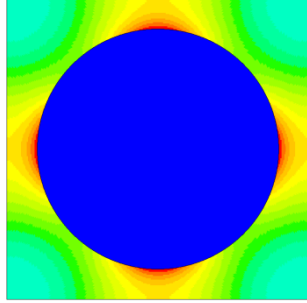
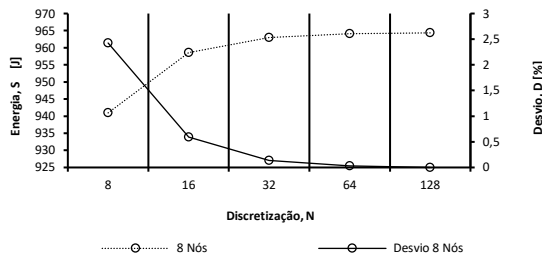


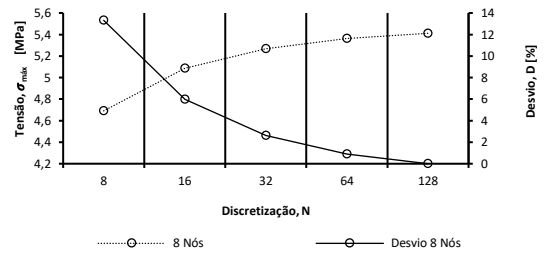
Figura 5.7: Representação de 1/4 da célula unitária com furo circular com malha não-quadrangular e fração volúmica de 50%. Localização dos pontos onde a tensão é lida.

Tabela 5.4: Geometria da célula unitária para o caso do furo circular com malha não-quadrangular com fração volúmica de 50%. Representação dos campos de tensão para cada discretização [Pa].

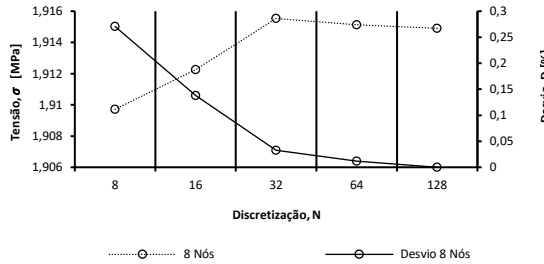
Geometria	Campo de Tensões	
	8×8	 <div data-bbox="1177 392 1284 698"> <p>404E-09 223367 446733 670100 893467 .112E+07 .134E+07 .156E+07 .179E+07 .201E+07 .223E+07 .246E+07 .268E+07 .290E+07 .313E+07 .335E+07 .357E+07 .380E+07 .402E+07 .424E+07 .447E+07 .469E+07</p> </div>
	16×16	 <div data-bbox="1177 714 1284 1016"> <p>584E-09 242252 484505 726757 969010 .121E+07 .145E+07 .170E+07 .194E+07 .218E+07 .242E+07 .266E+07 .291E+07 .315E+07 .339E+07 .363E+07 .388E+07 .412E+07 .436E+07 .460E+07 .485E+07 .509E+07</p> </div>
	32×32	 <div data-bbox="1177 1037 1284 1339"> <p>462E-09 250900 501800 752700 .100E+07 .125E+07 .151E+07 .176E+07 .201E+07 .226E+07 .251E+07 .276E+07 .301E+07 .326E+07 .351E+07 .376E+07 .401E+07 .427E+07 .452E+07 .477E+07 .502E+07 .527E+07</p> </div>
	64×64	 <div data-bbox="1177 1359 1284 1662"> <p>ANSYS 12.1 36E-09 255343 510686 766029 .102E+07 .128E+07 .153E+07 .179E+07 .204E+07 .230E+07 .255E+07 .281E+07 .306E+07 .332E+07 .357E+07 .383E+07 .409E+07 .434E+07 .460E+07 .485E+07 .511E+07 .536E+07</p> </div>
	128×128	 <div data-bbox="1177 1682 1284 1984"> <p>362E-09 257681 515362 773043 .103E+07 .129E+07 .155E+07 .180E+07 .206E+07 .232E+07 .258E+07 .283E+07 .309E+07 .335E+07 .361E+07 .387E+07 .412E+07 .438E+07 .464E+07 .490E+07 .515E+07 .541E+07</p> </div>



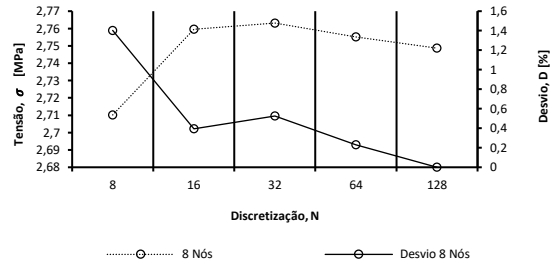
a) Energia da deformação, S



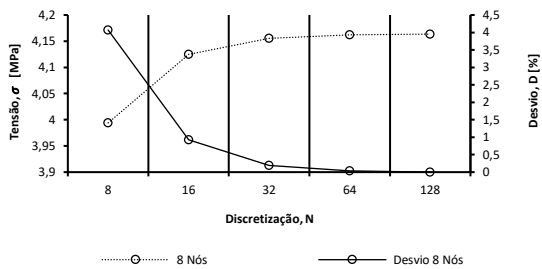
b) Tensão equivalente máxima, σ_{max}



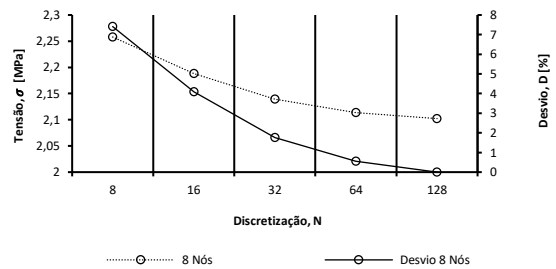
c) Ponto 1



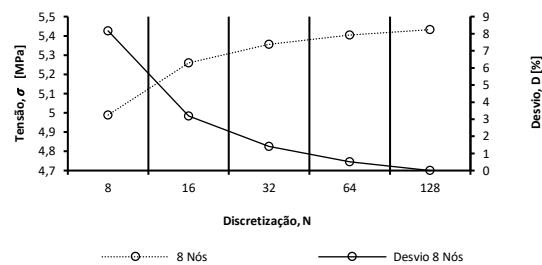
d) Ponto 2



e) Ponto 3



f) Ponto 4



g) Ponto 5

Figura 5.8: Estudo de convergência de malha para o caso hidrostático numa célula unitária com furo circular com malha não-quadrangular e fração volumica de 50%: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão lida no ponto 1, d) Tensão lida no ponto 2, e) Tensão lida no ponto 3, f) Tensão lida no ponto 4. g) Tensão lida no ponto 5. Desvio calculado pela equação (3.1).

Nas figuras 5.8a a 5.8g são apresentados os gráficos do estudo de convergência de malha da célula unitária com furo circular com malha não-quadrangular. Como se pode observar no gráfico da figura 5.8a, existe convergência monótona. O valor da energia de deformação é subestimado pela curva do gráfico. No gráfico da figura 5.8b observa-se que a tensão equivalente

máxima também converge à medida que a discretização da célula aumenta. Quanto à tensão lida nos nós, observa-se na figura 5.7 a representação dos pontos onde foi lida a tensão. Os gráficos correspondentes são apresentados nas figuras 5.8c a 5.8g. Nas figuras 5.8c e 5.8d, existe alguma flutuação nos resultados. Este facto pode estar relacionado com o número de graus de liberdade do elemento de 8 nós utilizado nesta análise. O gráfico da figura 5.8f mostra uma convergência sobrestimada do valor da tensão nesse nó. Isto acontece devido ao facto de que à medida que a discretização da célula aumenta, a tensão concentra-se em zonas específicas da geometria, afastando-se deste ponto e resultando num decréscimo da tensão. Nos gráficos das figuras 5.8e e 5.8g observa-se convergência da tensão.

5.1.5 Caso hidrostático – Furo circular com malha não-quadrangular e fração volúmica de 80%

O próximo caso é igual ao anterior, exceto na fração volúmica que neste caso é de 80%. A geometria é modelada da mesma maneira com o mesmo propósito de tornar possível a comparação exata da distribuição de tensão ao longo das várias discretizações sem a geometria do furo ser alterada. O carregamento aplicado é também o mesmo que no caso anterior.

Na tabela 5.5 está representada a geometria do furo circular com a malha não-quadrangular e fração volúmica de 80% para as várias discretizações e os respetivos campos de tensão. Nas figuras da tabela 5.5 observam-se concentrações de tensão nas zonas de fronteira (sólido/vazio) do furo da geometria. De acordo com o gráfico da figura 5.10b a tensão equivalente máxima apresenta convergência monótona crescente, sobrestimando o valor da tensão. No gráfico da figura 5.10a, a energia de deformação também apresenta convergência monótona crescente possuindo um desvio entre discretizações muito baixo.

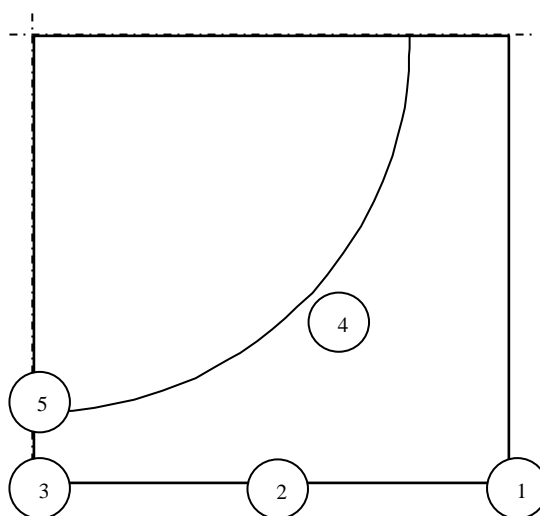
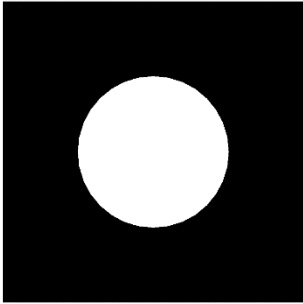
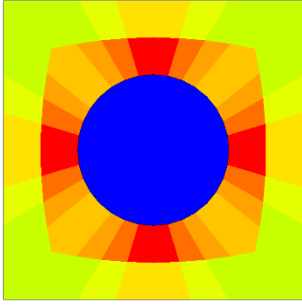
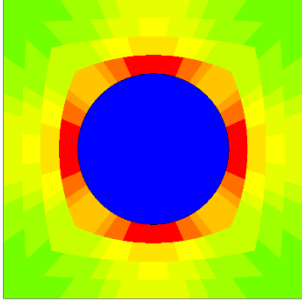
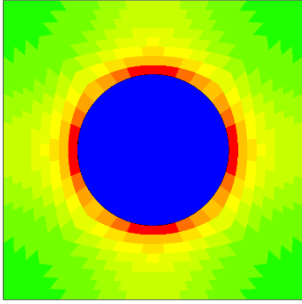
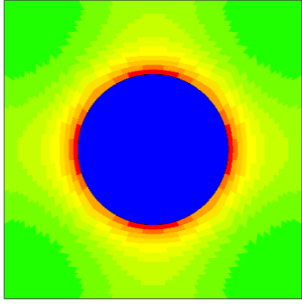
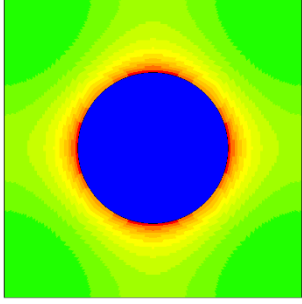
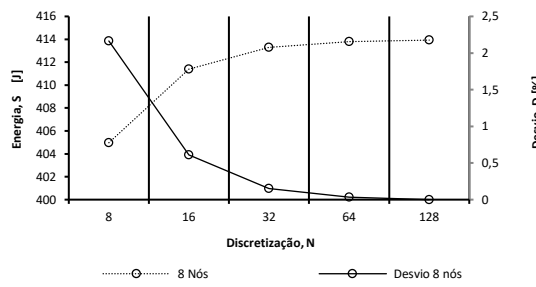


Figura 5.9: Representação de 1/4 da célula unitária com furo circular com malha não-quadrangular e fração volúmica de 80%. Localização dos pontos onde a tensão é lida.

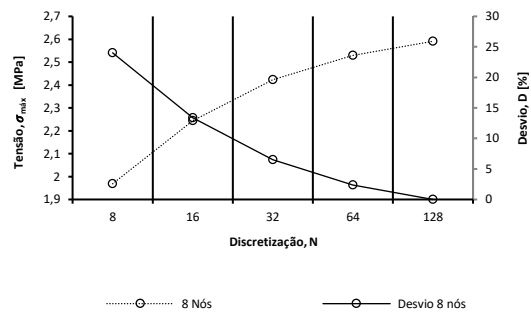
Tabela 5.5: Geometria da célula unitária para o caso do furo circular com malha não-quadrangular e fração volúmica de 80%. Representação dos campos de tensão para cada discretização [Pa].

Geometria		Campo de Tensões	
	8×8		<ul style="list-style-type: none"> .223E-09 93743 187486 281229 374971 468714 562457 656200 749943 843686 937429 .103E+07 .112E+07 .122E+07 .131E+07 .141E+07 .150E+07 .159E+07 .169E+07 .178E+07 .187E+07 .197E+07
	16×16		<ul style="list-style-type: none"> .174E-09 106871 213743 320614 427486 534357 641229 748100 854971 961843 .107E+07 .118E+07 .128E+07 .139E+07 .150E+07 .160E+07 .171E+07 .182E+07 .192E+07 .203E+07 .214E+07 .224E+07
	32×32		<ul style="list-style-type: none"> .221E-09 115381 230762 346143 461524 576905 692286 807667 923048 .104E+07 .115E+07 .127E+07 .138E+07 .150E+07 .162E+07 .173E+07 .185E+07 .196E+07 .208E+07 .219E+07 .231E+07 .242E+07
	64×64		<ul style="list-style-type: none"> .242E-09 120481 240962 361443 481924 602405 722886 843367 963848 .108E+07 .120E+07 .133E+07 .145E+07 .157E+07 .169E+07 .181E+07 .193E+07 .205E+07 .217E+07 .229E+07 .241E+07 .253E+07
	128×128		<ul style="list-style-type: none"> .212E-09 123395 246790 370186 493581 616976 740371 863767 987162 .111E+07 .123E+07 .136E+07 .148E+07 .160E+07 .173E+07 .185E+07 .197E+07 .210E+07 .222E+07 .234E+07 .247E+07 .259E+07

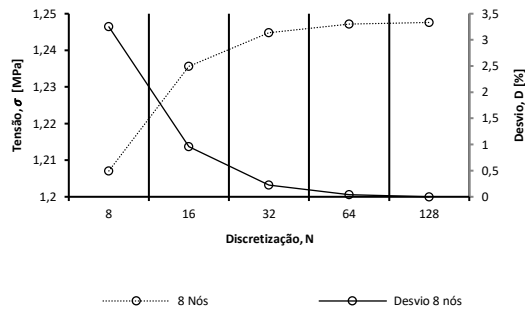
Estudo de convergência de malha



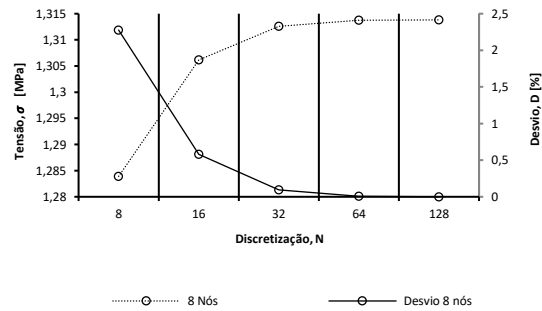
a) Energia da deformação, S



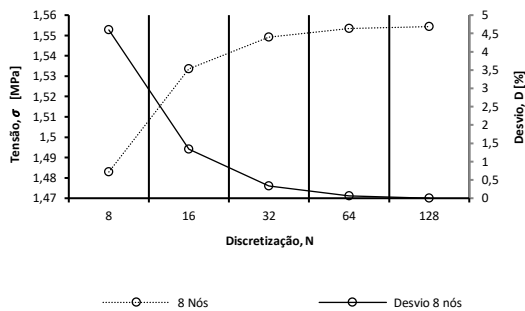
b) Tensão equivalente máxima, σ_{max}



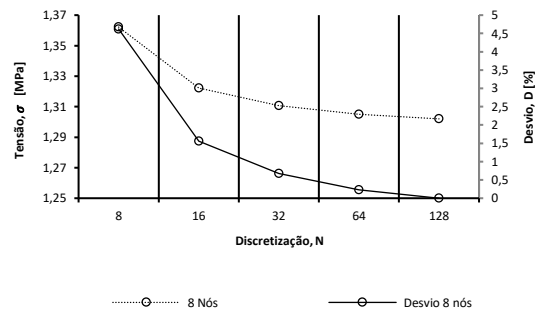
c) Ponto 1



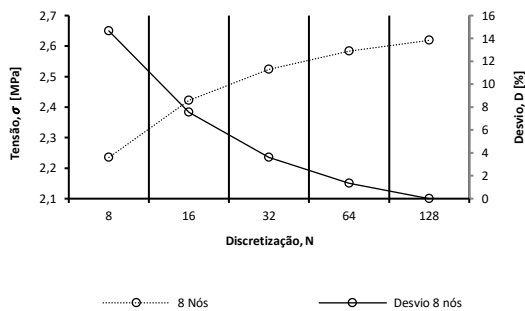
d) Ponto 2



e) Ponto 3



f) Ponto 4



g) Ponto 5

Figura 5.10: Estudo de convergência de malha para o caso hidrostático numa célula unitária com furo circular com malha adaptativa: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão lida no ponto 1, d) Tensão lida no ponto 2, e) Tensão lida no ponto 3, f) Tensão lida no ponto 4, g) Tensão lida no ponto 5. Desvio calculado pela equação (3.1).

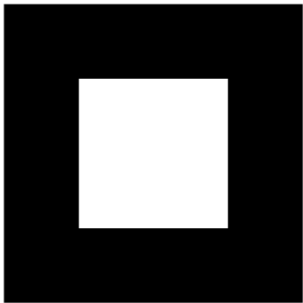
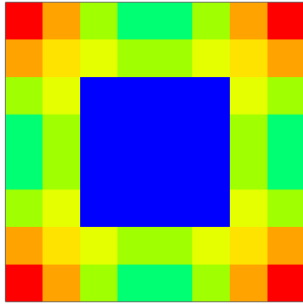
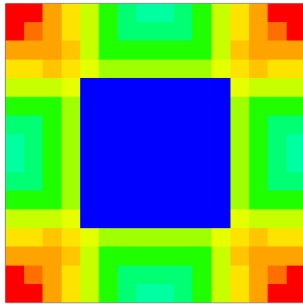
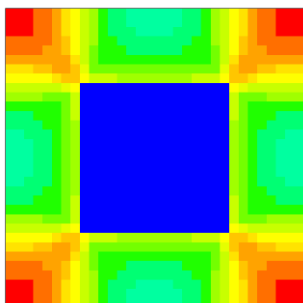
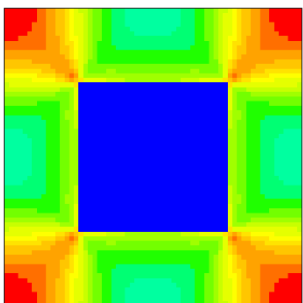
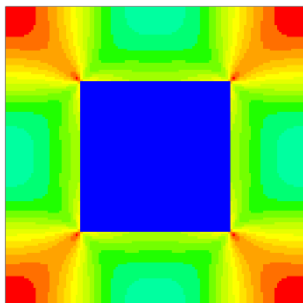
Nos gráficos da figura 5.10c a 5.10g estão representados os valores de tensão lidos nos pontos apresentados na figura 5.9. Em todos existe convergência da tensão, mas destaca-se o ponto 5 onde a tensão é máxima e o ponto 4. No ponto 5 a tensão lida é máxima e a curva é semelhante ao gráfico da tensão equivalente máxima calculada no elemento (figura 5.10b). Em ambos os gráficos devido à concentração de tensões, na última discretização a curva ainda está a convergir quando comparado com os outros que já estabilizaram. A tensão no ponto 4 apresenta uma convergência diferente dos outros pontos. Esta convergência resulta do afastamento da zona de concentração de tensões dos limites exteriores da célula unitária à medida que a discretização aumenta. O ponto 4 localiza-se no interior da célula, na primeira discretização está muito perto do elemento que possui a tensão máxima e na última discretização os elementos onde se encontram as tensões máximas estão muito afastados do ponto 4, sendo que as tensões analisadas ao longo das discretizações são decrescentes.

5.1.6 Caso corte 1 – Furo quadrado

O próximo caso consiste, novamente, na célula unitária com furo quadrado. A diferença neste caso é o carregamento a que está sujeita, foi aplicado um carregamento de corte composto por uma tração e uma compressão (tabela 3.1).

Na tabela 5.6 está representada a geometria da célula unitária com furo quadrado e campos de tensão para cada discretização. Nessa tabela, nas figuras dos campos de tensão, a partir da discretização de 64×64 , observa-se o desenvolvimento de singularidades junto aos cantos reentrantes do furo. Na discretização de 128×128 a singularidade é agravada e dá-se um pico de tensão nos cantos do furo. No gráfico da figura 5.11b, na curva dos elementos de 20 nós, na discretização de 128×128 existe um aumento da tensão equivalente máxima. Isto acontece porque há uma mudança na localização do ponto onde a tensão equivalente é máxima, que passa de uma concentração de tensões situada nos cantos exteriores da célula para uma singularidade nos cantos do furo. No mesmo gráfico, a curva de 8 nós apresenta convergência monótona da tensão. Também no gráfico da figura 5.11a, observa-se a convergência da curva da energia, tanto na análise com elementos de 8 nós como de 20 nós. De salientar a melhor aproximação com elementos de 20 nós que apresenta convergência muito rápida e, portanto, um desvio muito baixo.

Tabela 5.6: Geometria da célula unitária para o caso do furo quadrado com carregamento ao corte 1 (tabela 3.1). Representação dos campos de tensão para cada discretização [Pa].

Geometria		Campo de Tensões	
	8×8		<ul style="list-style-type: none"> .390E-09 163705 327410 491114 654819 818524 982229 .115E+07 .131E+07 .147E+07 .164E+07 .180E+07 .196E+07 .213E+07 .229E+07 .246E+07 .262E+07 .278E+07 .295E+07 .311E+07 .327E+07 .344E+07
	16×16		<ul style="list-style-type: none"> .389E-09 171776 343552 515329 687105 858881 .103E+07 .120E+07 .137E+07 .155E+07 .172E+07 .189E+07 .206E+07 .223E+07 .240E+07 .258E+07 .275E+07 .292E+07 .309E+07 .326E+07 .344E+07 .361E+07
	32×32		<ul style="list-style-type: none"> .368E-09 174105 348210 522314 696419 870524 .104E+07 .122E+07 .139E+07 .157E+07 .174E+07 .192E+07 .209E+07 .226E+07 .244E+07 .261E+07 .279E+07 .296E+07 .313E+07 .331E+07 .348E+07 .366E+07
	64×64		<ul style="list-style-type: none"> .357E-09 174810 349619 524429 699238 874048 .105E+07 .122E+07 .140E+07 .157E+07 .175E+07 .192E+07 .210E+07 .227E+07 .245E+07 .262E+07 .280E+07 .297E+07 .315E+07 .332E+07 .350E+07 .367E+07
	128×128		<ul style="list-style-type: none"> .351E-09 175014 350029 525043 700057 875071 .105E+07 .123E+07 .140E+07 .158E+07 .175E+07 .193E+07 .210E+07 .228E+07 .245E+07 .263E+07 .280E+07 .298E+07 .315E+07 .333E+07 .350E+07 .368E+07

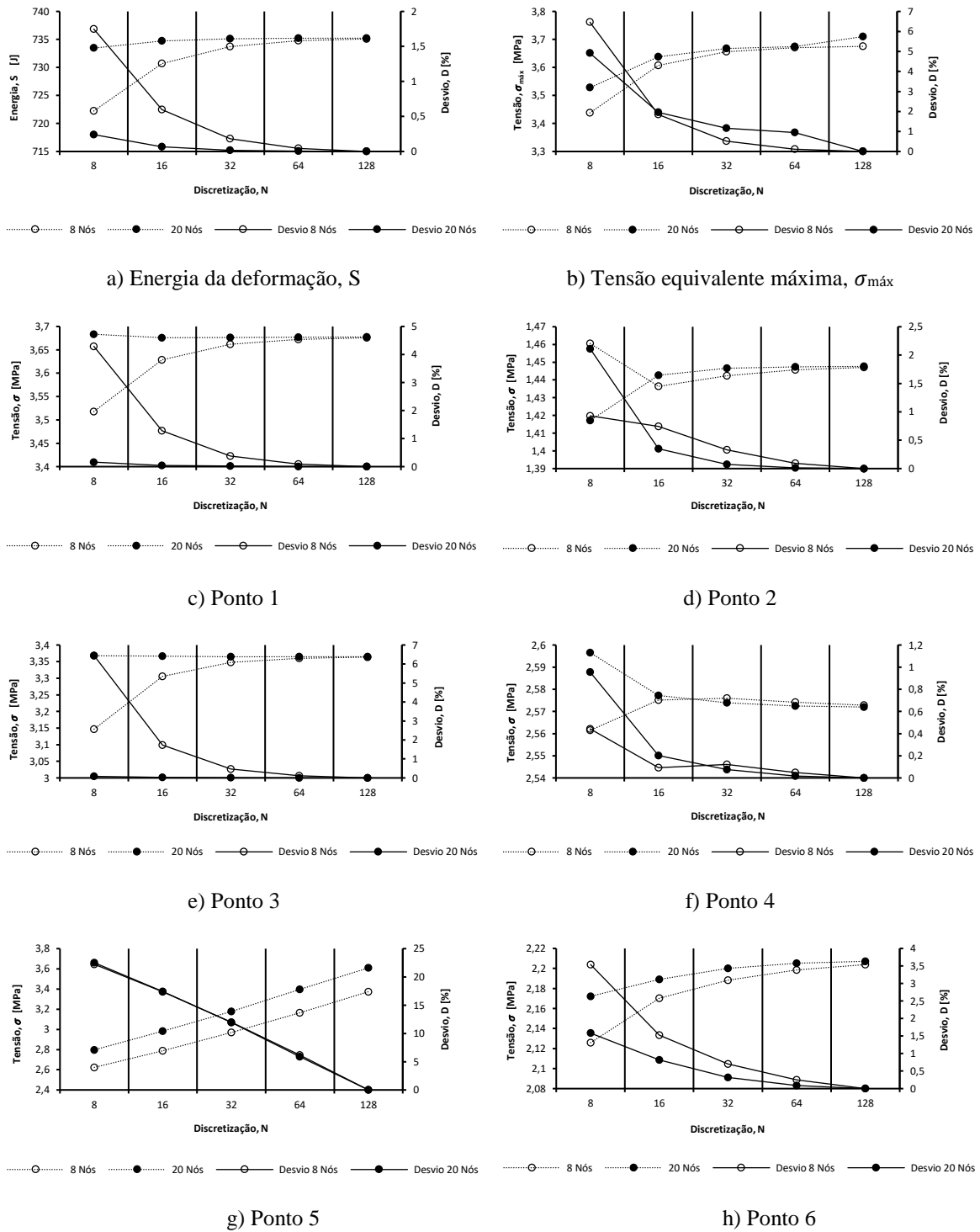


Figura 5.11: Estudo de convergência de malha para o caso corte 1 numa célula unitária com furo quadrado: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão lida no ponto 1, d) Tensão lida no ponto 2, e) Tensão lida no ponto 3, f) Tensão lida no ponto 4, g) Tensão lida no ponto 5, h) Tensão lida no ponto 6. Desvio calculado pela equação (3.1).

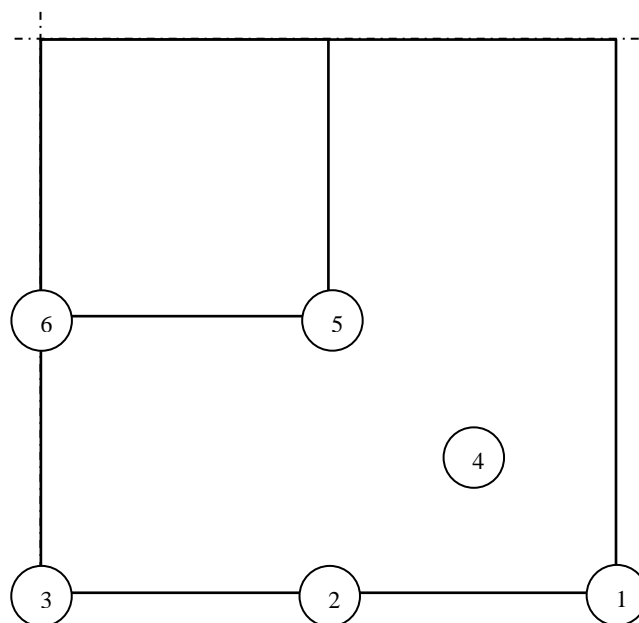


Figura 5.12: Representação de 1/4 da célula unitária com furo quadrado. Localização dos pontos onde a tensão é lida.

Nos gráficos das figuras 5.11c a 5.11h, observam-se as tensões lidas nos pontos representados na figura 5.12. No gráfico da figura 5.11c a convergência da tensão na análise com elementos de 8 nós é evidente. Quanto aos elementos de 20 nós, o valor de tensão na discretização de 8×8 é ligeiramente superior aos restantes, que pode ser explicado por um erro de discretização. Nas restantes discretizações, a convergência é muito rápida apresentado desvios muito baixos. No gráfico da figura 5.11g, a curva apresenta o comportamento de uma singularidade, ou seja, é divergente. Nos restantes pontos representados pelos gráficos da figura 5.11d, 5.11e, 5.11f e 5.11h, a convergência da tensão é evidente. Em algumas curvas das análises com elementos de 8 nós existem flutuações nos resultados, mas isso deve-se às funções interpoladoras dos elementos de 8 nós serem menos exatas que as de 20.

5.1.7 Caso corte 2 – Furo quadrado com rotação de 45° em malha não-quadrangular

No caso seguinte a geometria da célula unitária é malhada em elementos finitos de forma a eliminar o erro de modelação. A geometria é gerada com uma fração volúmica de 50% sólido/vazio e é sujeita ao carregamento de corte 2 (tabela 3.1). Esta geometria foi apenas gerada com elementos de 8 nós.

Na tabela 5.7 está representada a geometria da célula unitária e os campos de tensão para as várias discretizações da malha. Observa-se em todos os casos concentrações de tensão no interior da geometria no ponto 2, mas à medida que a discretização aumenta, a partir de 64×64 ,

surtem singularidades nos pontos 1 e 4 representados na figura 5.13. No entanto, a tensão máxima continua a ocorrer no ponto 2. Na figura 5.14a a energia de deformação apresenta uma convergência diferente dos casos anteriores, neste caso a curva faz uma aproximação sobrestimada do valor da energia, apresentando uma convergência monótona decrescente. Quanto à tensão equivalente máxima na figura 5.14b, esta apresenta convergência subestimando o valor exato da tensão.

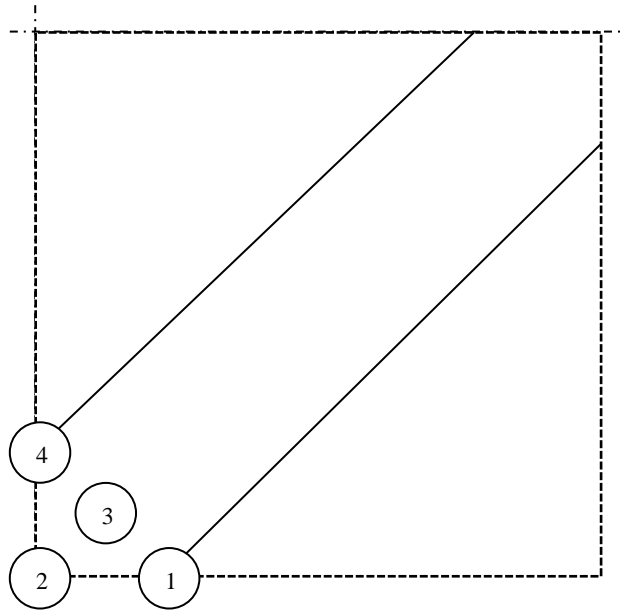
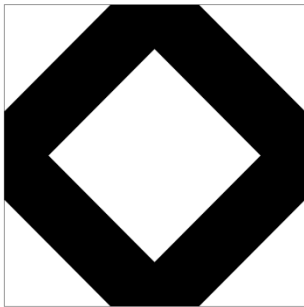
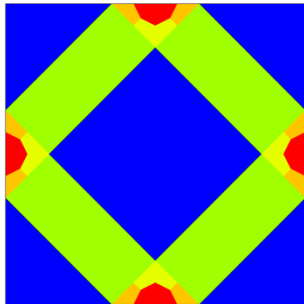
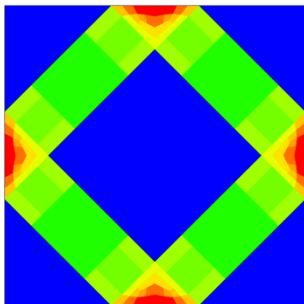
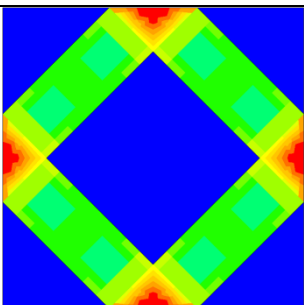
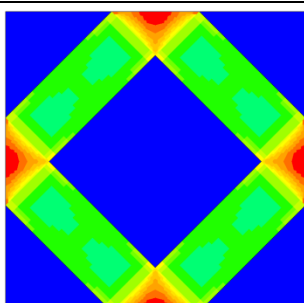
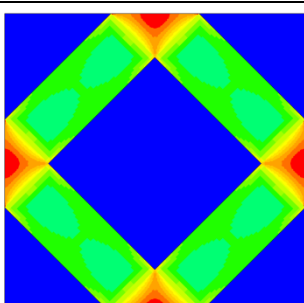


Figura 5.13: Representação de 1/4 da célula unitária com furo quadrado com rotação de 45° em malha não quadrangular. Representação dos pontos onde a tensão é lida.

Na figura 5.13 estão representados os pontos onde foram analisados os valores de tensão. Foram escolhidos estes pontos porque esta zona apresenta o maior gradiente de tensão e os efeitos da sua distribuição são mais perceptíveis. Os gráficos das figuras 5.14c até 5.14f representam a tensão lida nesses pontos. Nos gráficos das figuras 5.14c e 5.14f a tensão é divergente, o que indica a existência de uma singularidade. Nos gráficos da figura 5.14d e 5.14e existe convergência da tensão, no ponto 2 esta convergência é mais rápida, pois este ponto está localizado na concentração de tensão. No ponto 3, a convergência durante as primeiras discretizações da célula não é evidente, verifica-se um salto na tensão da discretização 16×16 para 32×32, o que pode ser explicado por um erro de discretização.

Tabela 5.7: Geometria da célula unitária para o caso do furo quadrado com rotação de 45° em malha não-quadrangular com carregamento ao corte 2 (tabela 3.1). Representação dos campos de tensão para cada discretização [Pa].

Geometria	Campo de Tensões	
	8×8	 <div> <div></div> <div>.507E-09</div> <div>273041</div> <div>546083</div> <div>819124</div> <div>.109E+07</div> <div>.137E+07</div> <div>.164E+07</div> <div>.191E+07</div> <div>.218E+07</div> <div>.246E+07</div> <div>.273E+07</div> <div>.300E+07</div> <div>.328E+07</div> <div>.355E+07</div> <div>.382E+07</div> <div>.410E+07</div> <div>.437E+07</div> <div>.464E+07</div> <div>.491E+07</div> <div>.519E+07</div> <div>.546E+07</div> <div>.573E+07</div> </div>
	16×16	 <div> <div></div> <div>.134E-06</div> <div>290945</div> <div>581890</div> <div>872835</div> <div>.116E+07</div> <div>.145E+07</div> <div>.175E+07</div> <div>.204E+07</div> <div>.233E+07</div> <div>.262E+07</div> <div>.291E+07</div> <div>.320E+07</div> <div>.349E+07</div> <div>.378E+07</div> <div>.407E+07</div> <div>.436E+07</div> <div>.466E+07</div> <div>.495E+07</div> <div>.524E+07</div> <div>.553E+07</div> <div>.582E+07</div> <div>.611E+07</div> </div>
	32×32	 <div> <div></div> <div>.143E-08</div> <div>295912</div> <div>591824</div> <div>887736</div> <div>.118E+07</div> <div>.148E+07</div> <div>.178E+07</div> <div>.207E+07</div> <div>.237E+07</div> <div>.266E+07</div> <div>.296E+07</div> <div>.326E+07</div> <div>.355E+07</div> <div>.385E+07</div> <div>.414E+07</div> <div>.444E+07</div> <div>.473E+07</div> <div>.503E+07</div> <div>.533E+07</div> <div>.562E+07</div> <div>.592E+07</div> <div>.621E+07</div> </div>
	64×64	 <div> <div></div> <div>.499E-09</div> <div>298109</div> <div>596219</div> <div>894328</div> <div>.119E+07</div> <div>.149E+07</div> <div>.179E+07</div> <div>.209E+07</div> <div>.238E+07</div> <div>.268E+07</div> <div>.298E+07</div> <div>.328E+07</div> <div>.358E+07</div> <div>.388E+07</div> <div>.417E+07</div> <div>.447E+07</div> <div>.477E+07</div> <div>.507E+07</div> <div>.537E+07</div> <div>.566E+07</div> <div>.596E+07</div> <div>.626E+07</div> </div>
	128×128	 <div> <div></div> <div>.285E-09</div> <div>299119</div> <div>598238</div> <div>897357</div> <div>.120E+07</div> <div>.150E+07</div> <div>.179E+07</div> <div>.209E+07</div> <div>.239E+07</div> <div>.269E+07</div> <div>.299E+07</div> <div>.329E+07</div> <div>.359E+07</div> <div>.389E+07</div> <div>.419E+07</div> <div>.449E+07</div> <div>.479E+07</div> <div>.509E+07</div> <div>.538E+07</div> <div>.568E+07</div> <div>.598E+07</div> <div>.628E+07</div> </div>

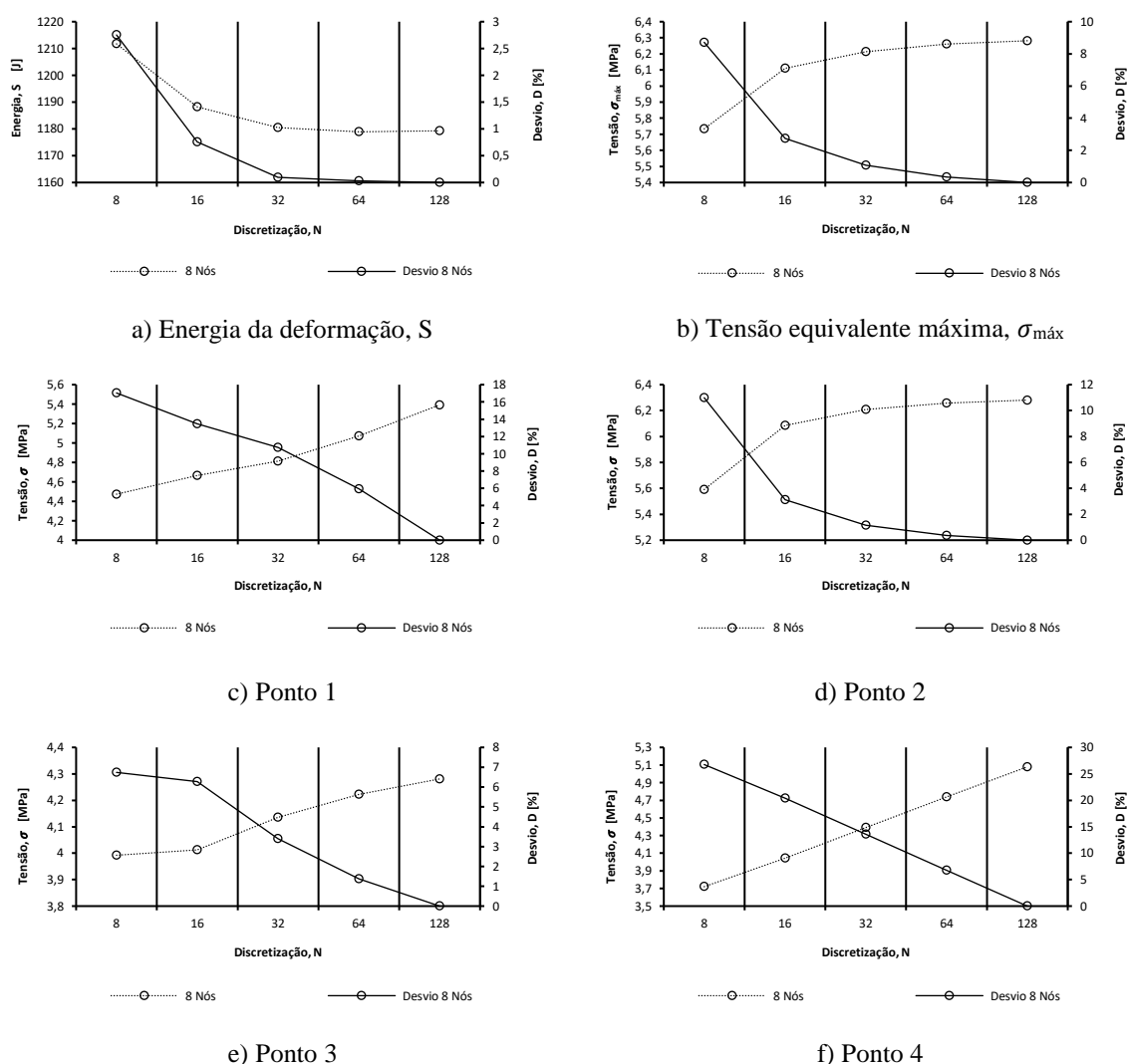


Figura 5.14: Estudo de convergência de malha para o caso corte 2 numa célula com furo quadrado com uma rotação de 45° em malha não-quadrangular: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão lida no ponto 1, d) Tensão lida no ponto 2, e) Tensão lida no ponto 3, f) Tensão lida no ponto 4. Desvio calculado pela equação (3.1).

5.2 Otimização topológica de geometrias com constrangimento de volume

Nesta secção é apresentado o estudo de convergência de malha das geometrias geradas por otimização topológica com constrangimento de volume no programa em FORTRAN. Este estudo é limitado em relação ao anterior porque não é possível considerar o valor da tensão nos nós dos elementos. Isto deve-se ao facto de as geometrias apresentarem na sua maioria zonas cinzentas, ou seja, de densidade intermédia ($0 < \rho < 1$), onde o valor de tensão nos nós não é real. Para analisar a tensão recorrendo a uma métrica local lê-se a tensão no elemento em vez de no nó. Na figura 5.15 estão representados os dois elementos escolhidos onde a tensão foi lida. No

1/4 de célula apresentado na figura a discretização é de 16×16 e na ampliação do elemento (figura 5.15a), estão representadas as várias discretizações seguintes, 32×32 está a vermelho com 4 elementos, 64×64 está a amarelo com 16 elementos e 128×128 está a verde com 64 elementos. Os resultados de tensão lidos nos elementos das várias discretizações foram organizados como se mostra na figura 5.15(b.1, b.2 e b.3) num gráfico de barras gerado em Matlab. A partir da discretização 32×32 (figura 5.15b.1) os valores da tensão são introduzidos seguindo as setas, primeiro os elementos inferiores e em seguida os superiores. Na discretização 64×64 (figura 5.15b.2) segue-se o mesmo raciocínio, mas como cada elemento de 32×32 foi dividido em quatro, primeiro são introduzidos os quatro elementos do canto inferior direito seguindo as setas, em seguida os quatro elementos do canto inferior esquerdo seguindo as setas. Passando para o conjunto de elementos superior, inicia-se nos quatro elementos do canto superior direito e por fim os do canto superior esquerdo, sempre seguindo as setas. No caso da discretização 128×128 , de acordo com o raciocínio anterior começa-se no conjunto de 4 elementos do canto inferior direito, introduzindo todos os valores de tensão dos elementos no quadrante azul. Prossegue-se para o quadrante a amarelo, depois para o laranja e finalmente para o lilás, sempre seguindo a ordem das setas e o mesmo raciocínio do caso anterior. A razão para esta organização está no facto de, por exemplo, 1 elemento de 16×16 ser discretizado por 4 elementos de 32×32 e um elemento de 32×32 ser discretizado por 4 elementos de 64×64 e assim sucessivamente. Portanto, de maneira a ser possível comparar a evolução da tensão à medida que a discretização aumenta foi necessário agrupar os resultados da forma descrita anteriormente.

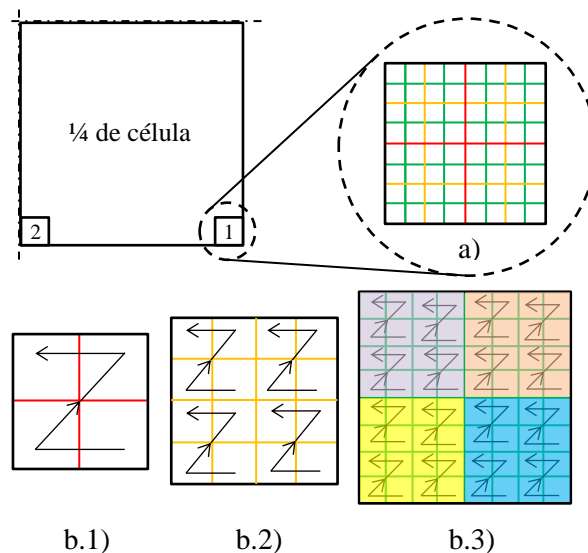


Figura 5.15: Representação dos elementos considerados na análise da tensão, ampliação de um elemento com a representação dos elementos considerados nas restantes discretizações e demonstração do raciocínio de apresentação de resultados: (a) O quadrado a preto exterior representa o elemento da discretização 16×16 , a vermelho está representada a discretização 32×32 , a amarelo a discretização 64×64

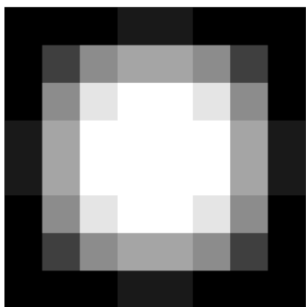
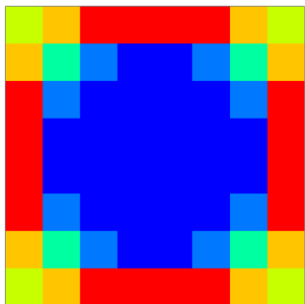
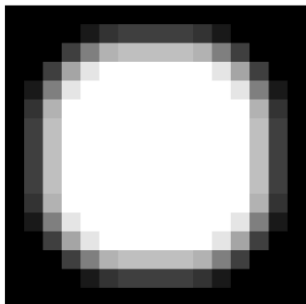
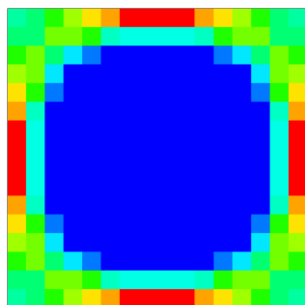
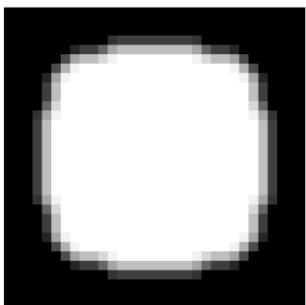
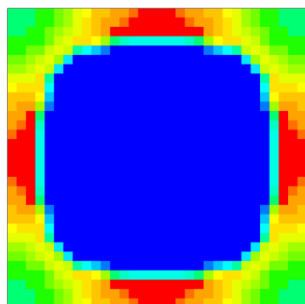
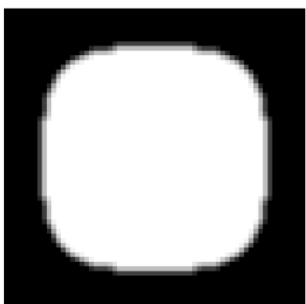
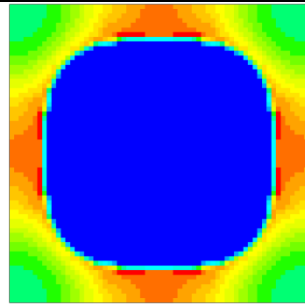

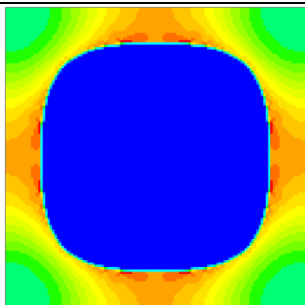
e a verde a discretização 128×128. b). Demonstração do raciocínio de apresentação dos resultados nos gráficos gerados em Matlab.

5.2.1 Caso hidrostático com constrangimento de volume de 50% e filtro ativo

No seguinte caso de otimização topológica é considerado um constrangimento de volume de 50% com a célula unitária sujeita a um carregamento hidrostático. Neste caso foi considerado ativo o filtro de densidades. Na tabela 5.8 estão representadas as otimizações realizadas para as várias discretizações e os respetivos campos de tensão. À medida que a discretização aumenta, nas zonas de fronteira do furo parecem aparecer singularidades. O gráfico da figura 5.16b mostra que a tensão sobe ligeiramente da discretização 64×64 para 128×128. No entanto, como as geometrias são ligeiramente diferentes, essa subida de tensão pode ser explicada por erros de modelação e discretização porque em todas as discretizações anteriores, exceto 8×8, a tensão mostra um comportamento convergente. No gráfico da figura 5.16a a curva da energia tem um comportamento convergente decrescente, que pode ser explicado pela existência de elementos cinzentos na malha de elementos finitos ($0 < \rho < 1$). Isto deve-se ao facto desses elementos possuírem uma elevada *compliance* em relação aos elementos sólidos ($\rho = 1$) e, portanto, maior energia de deformação.

Nos gráficos da figura 5.16c e 5.16d estão representadas as tensões equivalentes no elemento 1 e 2 indicados na figura 5.15. No gráfico da figura 5.16c a tensão converge à medida que a discretização aumenta. Neste gráfico, devido ao facto de este ser o elemento do canto da célula unitária, mais afastado das concentrações de tensão e singularidades, a tensão mantém-se mais ou menos constante em todos os elementos das maiores discretizações (32×32, 64×64, 128×128). Quanto ao gráfico da figura 5.16d, também se observa a convergência da tensão à medida que a discretização aumenta. Neste caso o elemento já se encontra numa zona bastante perto da concentração de tensões e observa-se que a tensão é um pouco mais irregular existindo uma grande diferença no resultado da discretização de 16×16 para as restantes. Em relação as restantes discretizações observa-se alguma periodicidade de umas em comparação com as outras. Este facto é de se esperar pois no caso hidrostático a distribuição de tensões é bastante suave ao longo de toda célula sendo que as zonas onde a tensão é maior é na fronteira do furo.

Tabela 5.8: Geometrias resultantes da otimização topológica da célula unitária com constrangimento de volume de 50% e filtro ativo. Campos de tensão resultantes da aplicação do carregamento hidrostático [Pa].

Geometria		Campo de Tensões
	8×8	 <div> <p> .304E-04 173571 347143 520714 694286 867857 .104E+07 .122E+07 .139E+07 .156E+07 .174E+07 .191E+07 .208E+07 .226E+07 .243E+07 .260E+07 .278E+07 .295E+07 .312E+07 .330E+07 .347E+07 .364E+07 </p> </div>
	16×16	 <div> <p> .601E-05 280643 561286 841929 .112E+07 .140E+07 .168E+07 .196E+07 .225E+07 .253E+07 .281E+07 .309E+07 .337E+07 .365E+07 .393E+07 .421E+07 .449E+07 .477E+07 .505E+07 .533E+07 .561E+07 .589E+07 </p> </div>
	32×32	 <div> <p> .484E-05 228705 457410 686114 914819 .114E+07 .137E+07 .160E+07 .183E+07 .206E+07 .229E+07 .252E+07 .274E+07 .297E+07 .320E+07 .343E+07 .366E+07 .389E+07 .412E+07 .435E+07 .457E+07 .480E+07 </p> </div>
	64×64	 <div> <p> .389E-05 219467 438933 658400 877867 .110E+07 .132E+07 .154E+07 .176E+07 .198E+07 .219E+07 .241E+07 .263E+07 .285E+07 .307E+07 .329E+07 .351E+07 .373E+07 .395E+07 .417E+07 .439E+07 .461E+07 </p> </div>
	128×128	 <div> <p> .370E-05 220186 440371 660557 880743 .110E+07 .132E+07 .154E+07 .176E+07 .198E+07 .220E+07 .242E+07 .264E+07 .286E+07 .308E+07 .330E+07 .352E+07 .374E+07 .396E+07 .418E+07 .440E+07 .462E+07 </p> </div>

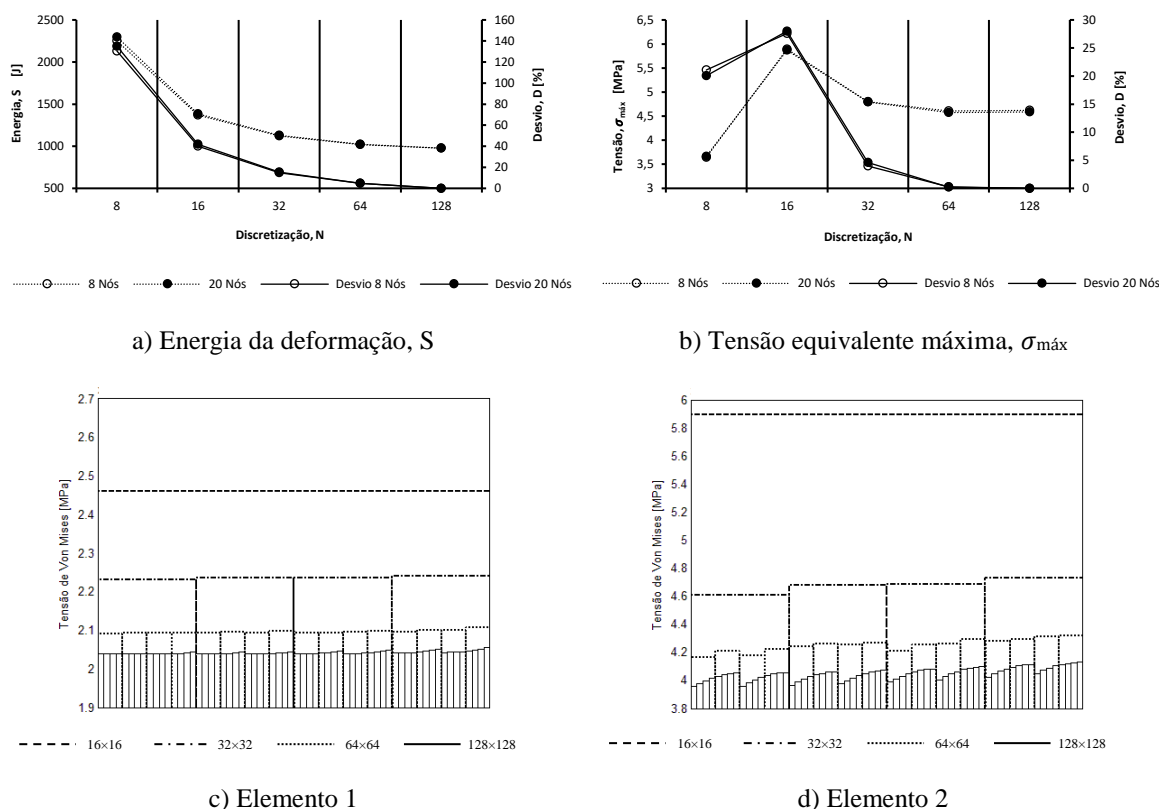


Figura 5.16: Estudo de convergência de malha para o caso hidrostático numa geometria gerada por otimização topológica com constrangimento de volume de 50%: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão equivalente lida no elemento 1, d) Tensão equivalente lida no elemento 2. Desvio calculado pela equação (3.1).

5.2.2 Caso hidrostático com constrangimento de volume de 50% sem filtro ativo

O caso seguinte é igual ao anterior, a única diferença é que neste o filtro está desativado. Esta otimização foi realizada para demonstrar a importância da utilização de filtros em otimização topológica e mostrar uma evolução dos resultados de convergência de malha desde a análise de geometrias pré-definidas até geometrias otimizadas topologicamente com e sem filtro.

Na tabela 5.9 são apresentadas as geometrias otimizadas para cada discretização e o correspondente campo de tensão resultante do carregamento hidrostático. Nas imagens dos campos de tensão apresentados na tabela 5.9 verifica-se que a concentração de tensão evolui mais rapidamente para singularidade do que no caso com o filtro ativo. A partir da discretização 32×32 observam-se singularidades na fronteira do furo da geometria. No gráfico da figura 5.17b está representada a curva da tensão equivalente máxima que mostra um comportamento divergente da tensão. O gráfico da figura 5.17a representa a curva da energia que apresenta convergência irregular decrescente. Este comportamento da curva deve-se à existência de elementos cinzentos

na malha, o que provoca um aumento da energia em discretizações mais baixas e consequente convergência decrescente.

Nos gráficos da figura 5.17c e 5.17d estão representadas as tensões equivalentes lidas nos elementos 1 e 2 da figura 5.15. Na figura 5.17c observa-se convergência relativamente rápida da tensão. Isto acontece porque na zona onde se encontra o elemento 1 o gradiente de tensão é muito baixo. No elemento 2, representado no gráfico da figura 5.17d, devido ao maior gradiente de tensão nessa zona, é possível identificar no gráfico as barras que pertencem aos elementos que estão mais próximos das singularidades junto à fronteira do furo. Esta instabilidade da tensão deve-se exatamente à presença de singularidades no campo de tensões. Apesar disso, o gráfico mostra convergência da tensão.

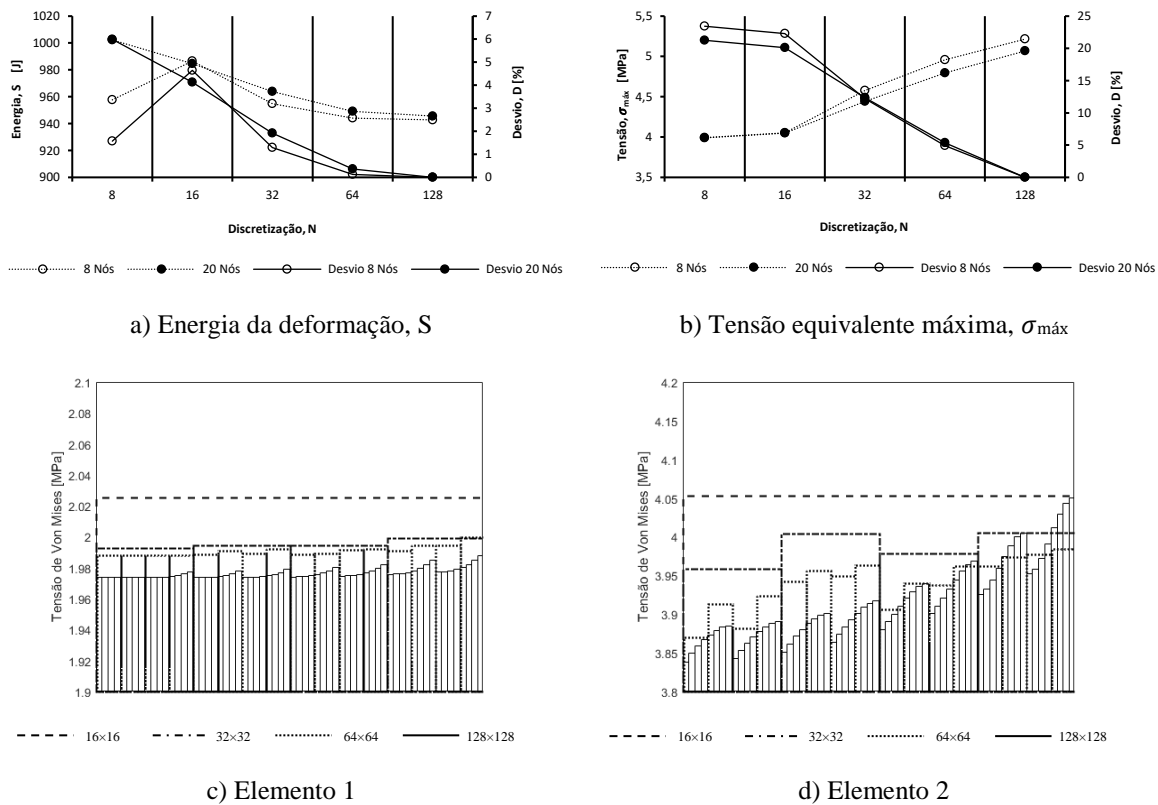
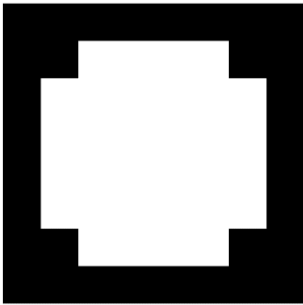
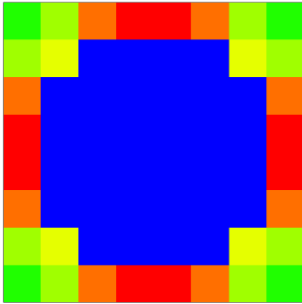
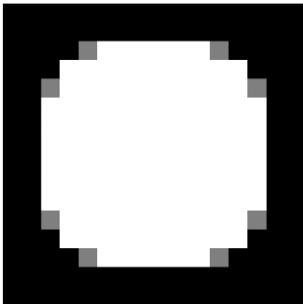
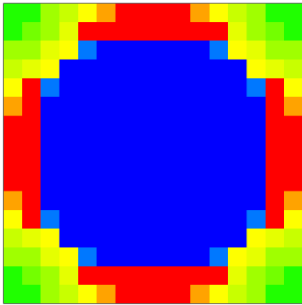
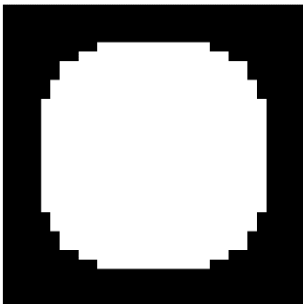
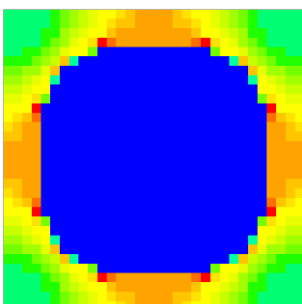

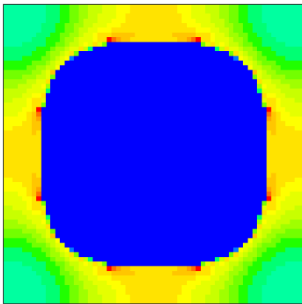
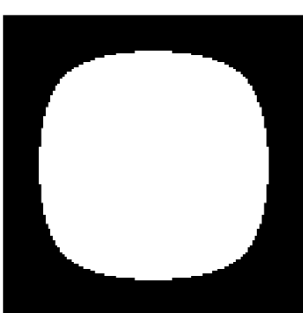
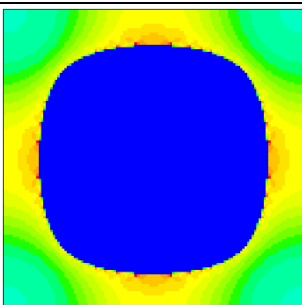


Figura 5.17: Estudo de convergência de malha para o caso hidrostático numa geometria gerada por otimização topológica com constrangimento de volume de 50% com filtro desativado: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão equivalente lida no elemento 1, d) Tensão equivalente lida no elemento 2. Desvio calculado pela equação (3.1).

Tabela 5.9: Geometrias resultantes da otimização topológica da célula unitária com constrangimento de volume de 50% com filtro desativado. Campos de tensão resultantes da aplicação do carregamento hidrostático [Pa].

Geometria	Campo de Tensões	
	8×8	 <div> <p> .417E-05 190129 380257 570386 760514 950643 .114E+07 .133E+07 .152E+07 .171E+07 .190E+07 .209E+07 .228E+07 .247E+07 .266E+07 .285E+07 .304E+07 .323E+07 .342E+07 .361E+07 .380E+07 .399E+07 </p> </div>
	16×16	 <div> <p> .347E-05 192976 385952 578929 771905 964881 .116E+07 .135E+07 .154E+07 .174E+07 .193E+07 .212E+07 .232E+07 .251E+07 .270E+07 .289E+07 .309E+07 .328E+07 .347E+07 .367E+07 .386E+07 .405E+07 </p> </div>
	32×32	 <div> <p> .396E-05 217986 435971 653957 871943 .109E+07 .131E+07 .153E+07 .174E+07 .196E+07 .218E+07 .240E+07 .262E+07 .283E+07 .305E+07 .327E+07 .349E+07 .371E+07 .392E+07 .414E+07 .436E+07 .458E+07 </p> </div>
	64×64	 <div> <p> .344E-05 236138 472276 708414 944552 .118E+07 .142E+07 .165E+07 .189E+07 .213E+07 .236E+07 .260E+07 .283E+07 .307E+07 .331E+07 .354E+07 .378E+07 .401E+07 .425E+07 .449E+07 .472E+07 .496E+07 </p> </div>
	128×128	 <div> <p> .346E-05 248348 496695 745043 993390 .124E+07 .149E+07 .174E+07 .199E+07 .224E+07 .248E+07 .273E+07 .298E+07 .323E+07 .348E+07 .373E+07 .397E+07 .422E+07 .447E+07 .472E+07 .497E+07 .522E+07 </p> </div>

5.2.3 Caso hidrostático com constrangimento de volume de 80% e filtro ativo

Em seguida é apresentado o caso de otimização topológica da célula unitária com constrangimento de volume de 80% sujeita a um carregamento hidrostático. O filtro de densidades está ativo neste caso. Na tabela 5.10 são apresentadas as geometrias resultantes da otimização para as várias discretizações e os respectivos campos de tensão. No gráfico da figura 5.18b observa-se durante as primeiras discretizações que a tensão apresenta uma subida muito ligeira, mas a partir da discretização de 32×32 a tensão aumenta consideravelmente, embora pareça tender a convergir. No gráfico da figura 5.18a a curva apresenta convergência sobrestimada do valor exato de energia de deformação. O comportamento decrescente da curva deve-se à existência e elementos cinzentos na malha, que como explicada anteriormente provocam um aumento da energia de deformação.

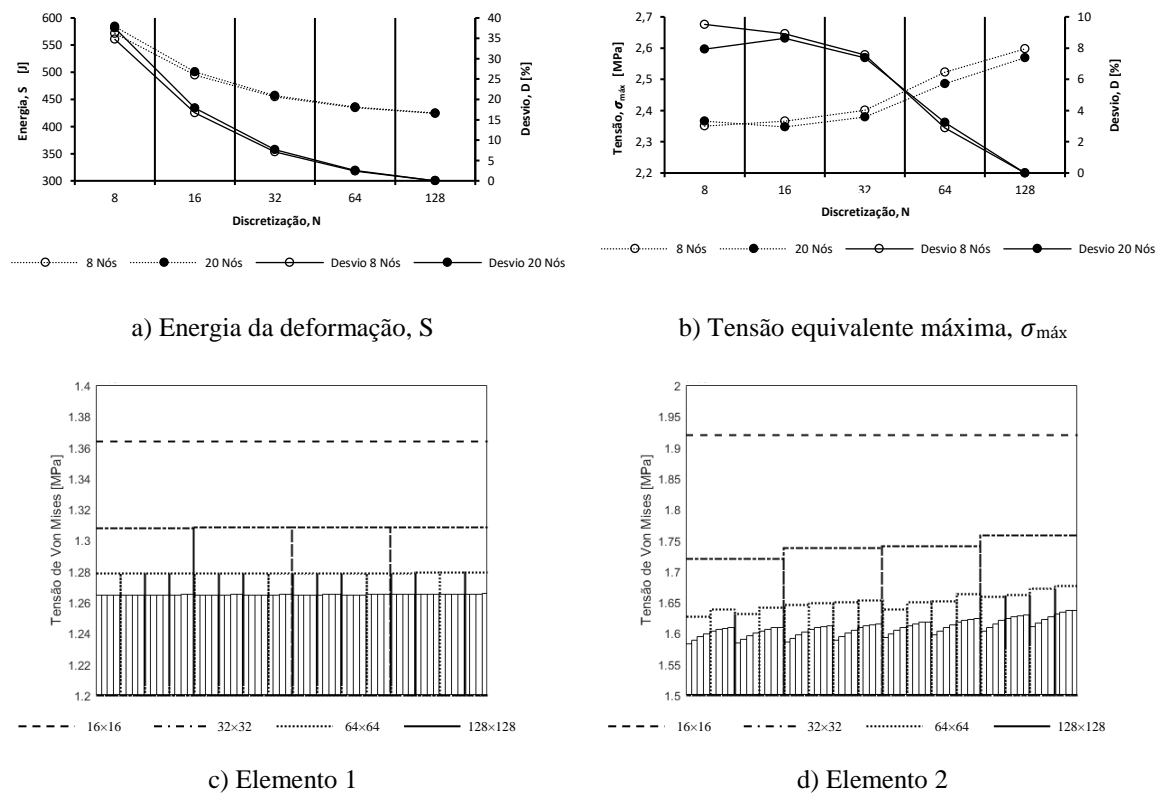
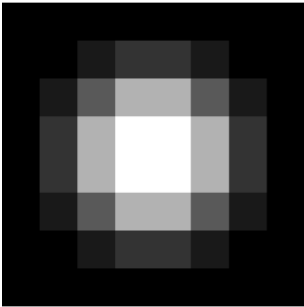
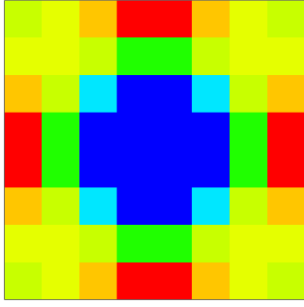
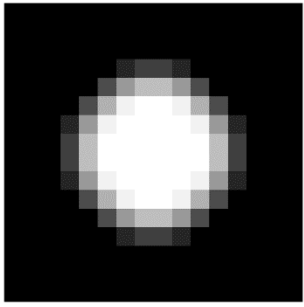
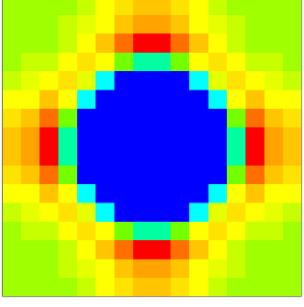
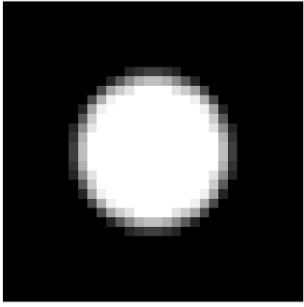
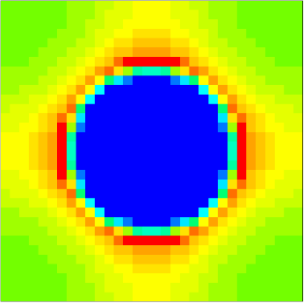
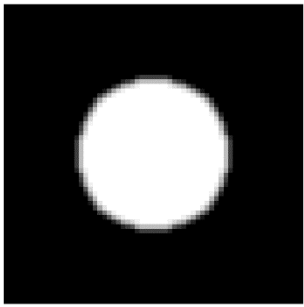
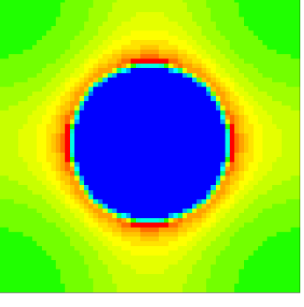
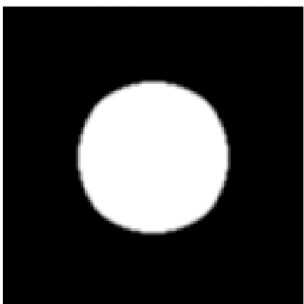
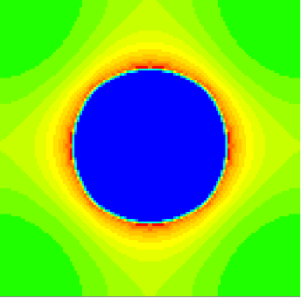


Figura 5.18: Estudo de convergência de malha para o caso hidrostático numa geometria gerada por otimização topológica com constrangimento de volume de 80% e filtro ativo: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão equivalente lida no elemento 1, d) Tensão equivalente lida no elemento 2. Desvio calculado pela equação (3.1).

Tabela 5.10: Geometrias resultantes da otimização topológica da célula unitária com constrangimento de volume de 80% e filtro ativo. Campos de tensão resultantes da aplicação do carregamento hidrostático [Pa].

Geometria		Campo de Tensões
	8×8	 <div data-bbox="1252 421 1364 732"> <p>70.179 111981 223892 335803 447714 559625 671536 783447 895358 .101E+07 .112E+07 .123E+07 .134E+07 .145E+07 .157E+07 .168E+07 .179E+07 .190E+07 .201E+07 .213E+07 .224E+07 .235E+07</p> </div>
	16×16	 <div data-bbox="1252 743 1364 1055"> <p>.436E-05 112667 225333 338000 450667 563333 676000 788667 901333 .101E+07 .113E+07 .124E+07 .135E+07 .146E+07 .158E+07 .169E+07 .180E+07 .192E+07 .203E+07 .214E+07 .225E+07 .237E+07</p> </div>
	32×32	 <div data-bbox="1252 1066 1364 1377"> <p>.285E-05 114329 228657 342986 457314 571643 685971 800300 914629 .103E+07 .114E+07 .126E+07 .137E+07 .149E+07 .160E+07 .171E+07 .183E+07 .194E+07 .206E+07 .217E+07 .229E+07 .240E+07</p> </div>
	64×64	 <div data-bbox="1252 1388 1364 1700"> <p>.248E-05 120119 240238 360357 480476 600595 720714 840833 960952 .108E+07 .120E+07 .132E+07 .144E+07 .156E+07 .168E+07 .180E+07 .192E+07 .204E+07 .216E+07 .228E+07 .240E+07 .252E+07</p> </div>
	128×128	 <div data-bbox="1252 1711 1364 2022"> <p>.245E-05 123543 247086 370629 494171 617714 741257 864800 988343 .111E+07 .124E+07 .136E+07 .148E+07 .161E+07 .173E+07 .185E+07 .198E+07 .210E+07 .222E+07 .235E+07 .247E+07 .259E+07</p> </div>

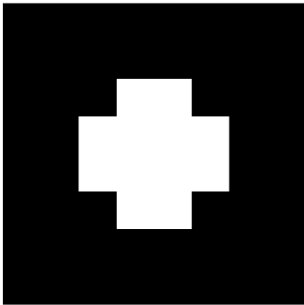
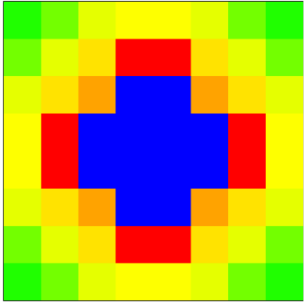
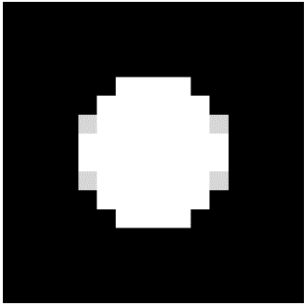
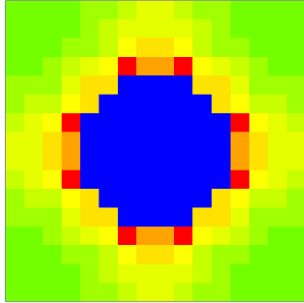
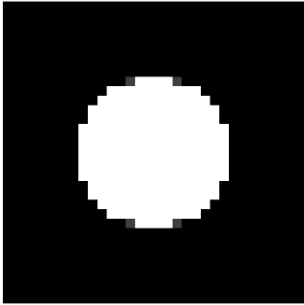
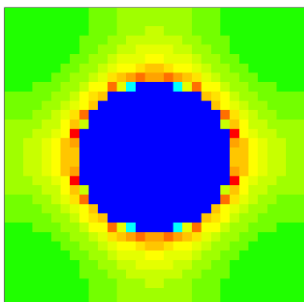
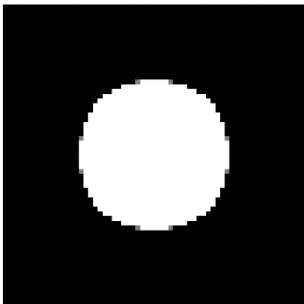
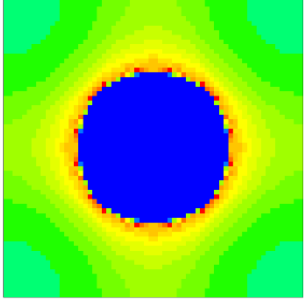
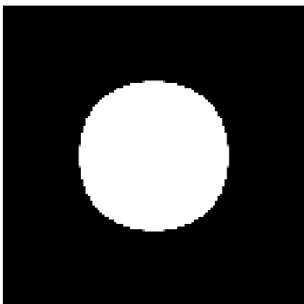
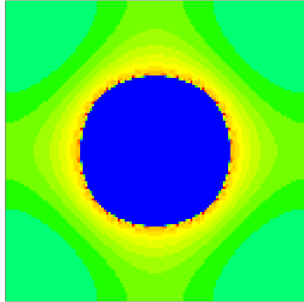
Nos gráficos das figuras 5.18c e 5.18d são apresentadas as tensões equivalentes lidas no elemento 1 e 2 da figura 5.15. O gráfico da figura 5.18c apresenta convergência decrescente da tensão. No elemento 1 a tensão é bastante estável ao longo de todas as discretizações por estar afastado das zonas de singularidades. O elemento 2 também apresenta convergência decrescente da tensão e uma ligeira diferença da tensão nos elementos devido ao aumento do gradiente da tensão ser maior nesta zona por estar mais perto das singularidades.

5.2.4 Caso hidrostático com constrangimento de volume de 80% sem filtro ativo

Este caso é exatamente igual ao anterior sendo que a única diferença é o filtro de densidades estar desativado. Na tabela 5.11 são apresentadas as geometrias obtidas por otimização e os respectivos campos de tensão resultantes da aplicação do carregamento hidrostático. Ao analisar os campos de tensão ao longo das discretizações observa-se que o aparecimento de singularidades acontece desde a discretização mais baixa (8×8). No gráfico da figura 5.19b, a curva da tensão apresenta um comportamento divergente indicando a presença de singularidades. Por sua vez no gráfico da figura 5.19a, a curva apresenta convergência decrescente, sobrestimando o valor exato da energia. O facto de a convergência ser decrescente deve-se à existência de elementos cinzentos na malha.

Nos gráficos das figuras 5.19c e 5.19d observam-se as tensões equivalentes lidas nos elementos 1 e 2 da figura 5.15. No gráfico da figura 5.19c existe rápida convergência da tensão nas várias discretizações apresentadas. No elemento 2, representado no gráfico da figura 5.19d tal já não acontece. Neste elemento, devido à sua maior proximidade com a zona onde se localizam as singularidades, a tensão nas várias discretizações é mais irregular, sendo perceptível quais as barras que representam os elementos mais próximos da zona de singularidades. No gráfico é possível identificar que a tensão nos elementos inferiores converge e nos superiores, mais perto das singularidades, a tensão tende a divergir.

Tabela 5.11: Geometrias resultantes da otimização topológica da célula unitária com constrangimento de volume de 80% e filtro desativado. Campos de tensão resultantes da aplicação do carregamento hidrostático [Pa].

Geometria		Campo de Tensões
	8×8	 <div data-bbox="1251 418 1362 728"> <p>.279E-05 99004.8 198010 297014 396019 495024 594029 693033 792038 891043 990048 .109E+07 .119E+07 .129E+07 .139E+07 .149E+07 .158E+07 .168E+07 .178E+07 .188E+07 .198E+07 .208E+07</p> </div>
	16×16	 <div data-bbox="1251 741 1362 1050"> <p>.231E-05 113595 227190 340786 454381 567976 681571 795167 908762 .102E+07 .114E+07 .125E+07 .136E+07 .148E+07 .159E+07 .170E+07 .182E+07 .193E+07 .204E+07 .216E+07 .227E+07 .239E+07</p> </div>
	32×32	 <div data-bbox="1251 1064 1362 1373"> <p>.214E-05 124619 249238 373857 498476 623095 747714 872333 996952 .112E+07 .125E+07 .137E+07 .150E+07 .162E+07 .174E+07 .187E+07 .199E+07 .212E+07 .224E+07 .237E+07 .249E+07 .262E+07</p> </div>
	64×64	 <div data-bbox="1251 1386 1362 1695"> <p>.216E-05 127786 255571 383357 511143 638929 766714 894500 .102E+07 .115E+07 .128E+07 .141E+07 .153E+07 .166E+07 .179E+07 .192E+07 .204E+07 .217E+07 .230E+07 .243E+07 .256E+07 .268E+07</p> </div>
	128×128	 <div data-bbox="1251 1709 1362 2018"> <p>.220E-05 137562 275124 412686 550248 687810 825371 962933 .110E+07 .124E+07 .138E+07 .151E+07 .165E+07 .179E+07 .193E+07 .206E+07 .220E+07 .234E+07 .248E+07 .261E+07 .275E+07 .289E+07</p> </div>

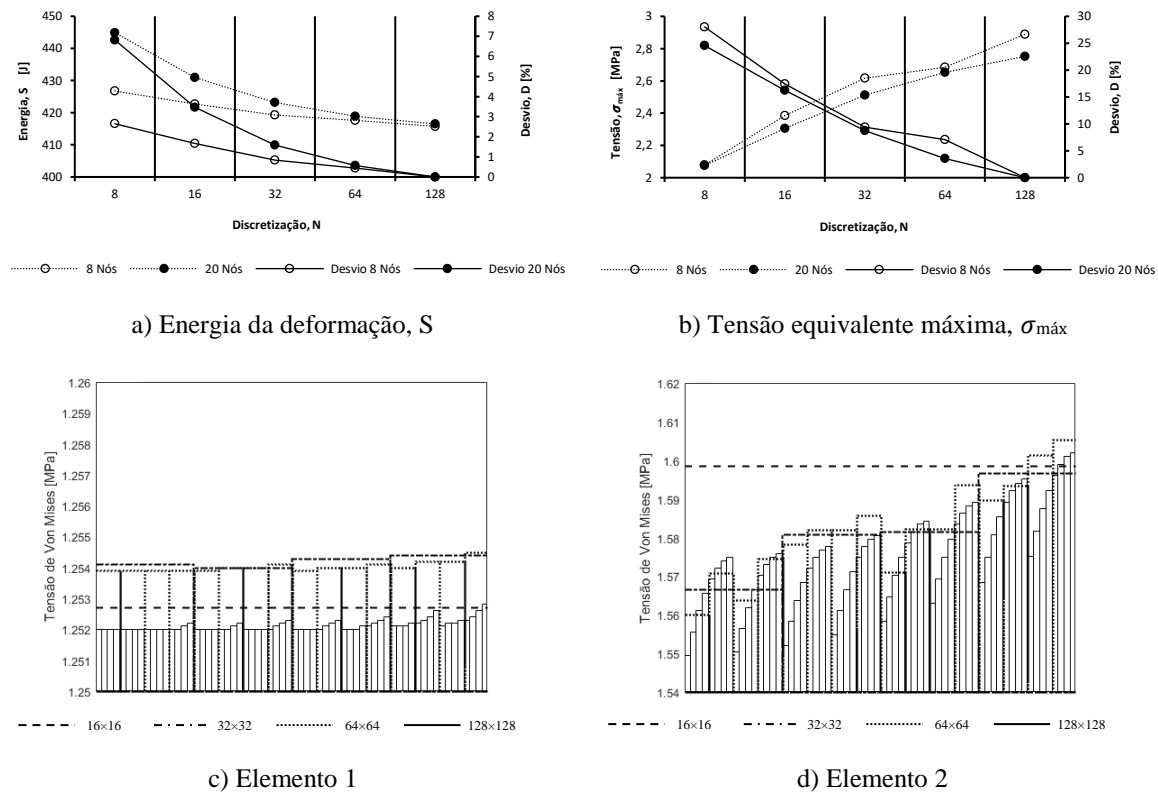
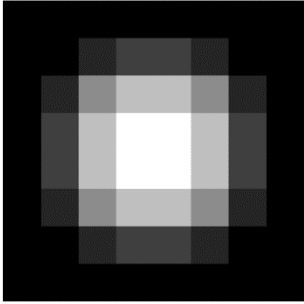
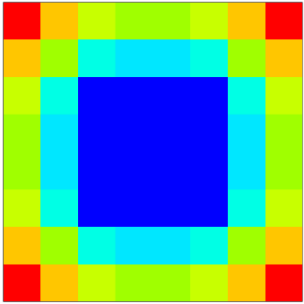
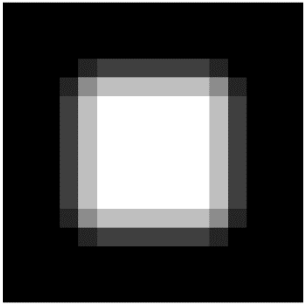
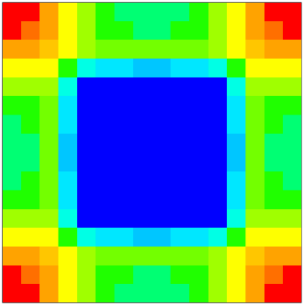
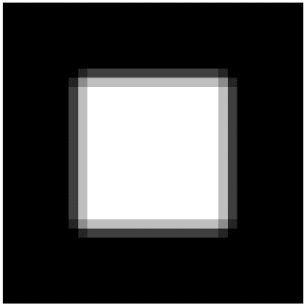
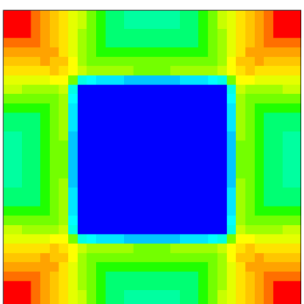
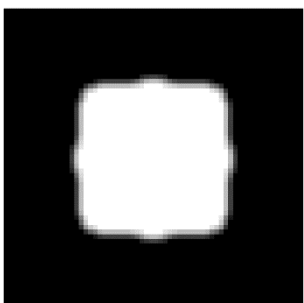
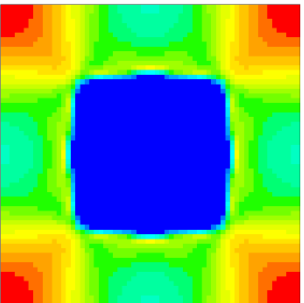
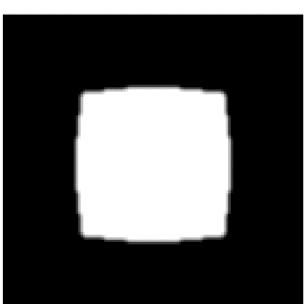
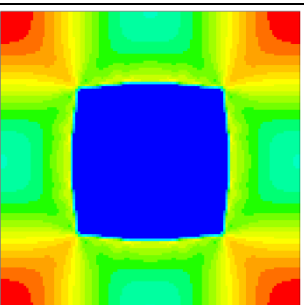


Figura 5.19: Estudo de convergência de malha para o caso hidrostático numa geometria gerada por otimização topológica com constrangimento de volume de 80% e filtro desativado: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão equivalente lida no elemento 1, d) Tensão equivalente lida no elemento 2. Desvio calculado pela equação (3.1).

5.2.5 Caso corte 1 com constrangimento de volume de 75% com filtro ativo

No próximo caso de otimização topológica com constrangimento de volume considera-se um constrangimento de 75%. Escolheu-se este valor de modo a que a geometria otimizada se aproxime da geometria do furo quadrado. O filtro de densidades está ativo e a célula unitária está sujeita ao carregamento corte 1 (tabela 3.1). Na tabela 5.12 observam-se as geometrias obtidas e os respetivos campos de tensão, que nas discretizações apresentadas observam-se concentrações de tensão junto a todos os cantos exteriores da geometria. O gráfico da figura 5.20b mostra a curva da tensão equivalente máxima que apresenta convergência decrescente. Existem algumas irregularidades nesta convergência que resultam de um erro de modelação devido às diferenças entre as geometrias. Quanto à energia de deformação, representada no gráfico da figura 5.19a, a curva apresenta convergência decrescente que é resultado da existência de elementos cinzentos presentes na malha.

Tabela 5.12: Geometrias resultantes da otimização topológica da célula unitária com constrangimento de volume de 75% com filtro ativo. Campos de tensão resultantes da aplicação do carregamento corte 1 [Pa].

Geometria		Campo de Tensões
	8×8	 <ul style="list-style-type: none"> .939E-05 194852 389705 584557 779410 974262 .117E+07 .136E+07 .156E+07 .175E+07 .195E+07 .214E+07 .234E+07 .253E+07 .273E+07 .292E+07 .312E+07 .331E+07 .351E+07 .370E+07 .390E+07 .409E+07
	16×16	 <ul style="list-style-type: none"> .593E-05 195900 391800 587700 783600 979500 .118E+07 .137E+07 .157E+07 .176E+07 .196E+07 .215E+07 .235E+07 .255E+07 .274E+07 .294E+07 .313E+07 .333E+07 .353E+07 .372E+07 .392E+07 .411E+07
	32×32	 <ul style="list-style-type: none"> .440E-05 187781 375562 563343 751124 938905 .113E+07 .131E+07 .150E+07 .169E+07 .188E+07 .207E+07 .225E+07 .244E+07 .263E+07 .282E+07 .300E+07 .319E+07 .338E+07 .357E+07 .376E+07 .394E+07
	64×64	 <ul style="list-style-type: none"> .183E-05 180190 360381 540571 720762 900952 .108E+07 .126E+07 .144E+07 .162E+07 .180E+07 .198E+07 .216E+07 .234E+07 .252E+07 .270E+07 .288E+07 .306E+07 .324E+07 .342E+07 .360E+07 .378E+07
	128×128	 <ul style="list-style-type: none"> .274E-05 176752 353505 530257 707010 883762 .106E+07 .124E+07 .141E+07 .159E+07 .177E+07 .194E+07 .212E+07 .230E+07 .247E+07 .265E+07 .283E+07 .300E+07 .318E+07 .336E+07 .354E+07 .371E+07

Nos gráficos das figuras 5.20c e 5.20d estão representadas as tensões lidas nos elementos 1 e 2 da figura 5.15. Nestes elementos é possível verificar-se convergência decrescente da tensão. O elemento 1 localiza-se na concentração de tensões e aqui a convergência é mais evidente. O elemento 2 localiza-se numa zona onde o gradiente de tensão é mais baixo e, portanto, a tensão converge mais rapidamente.

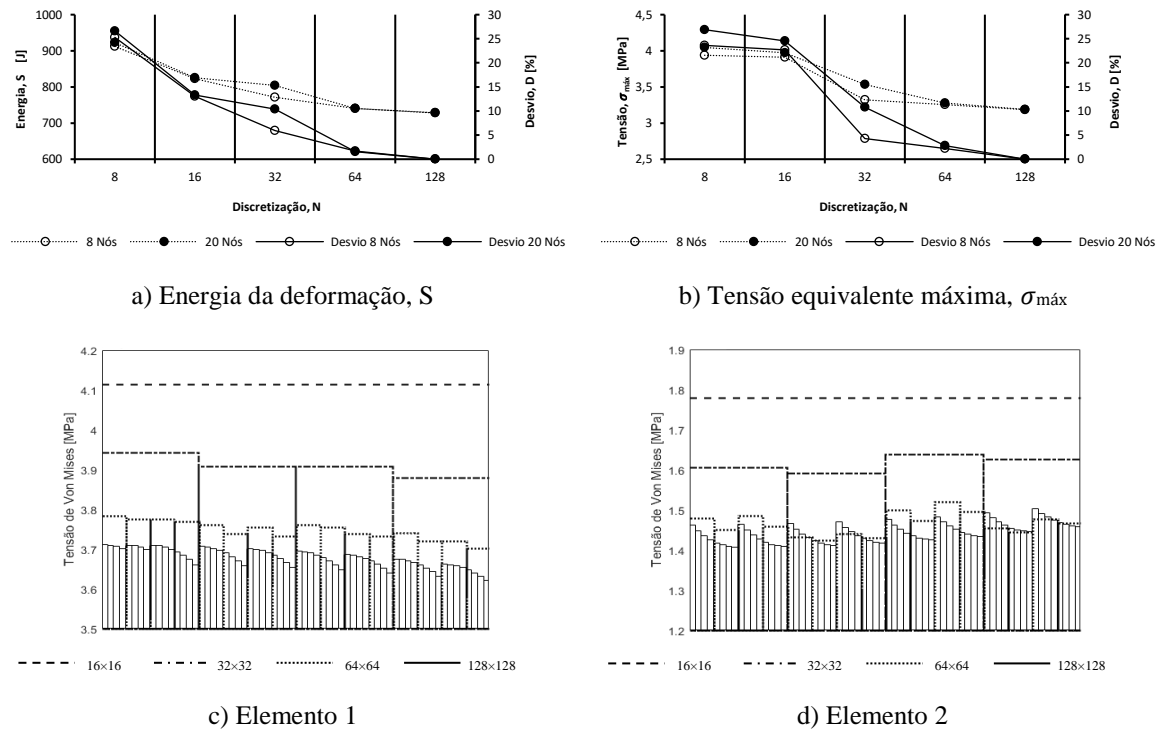
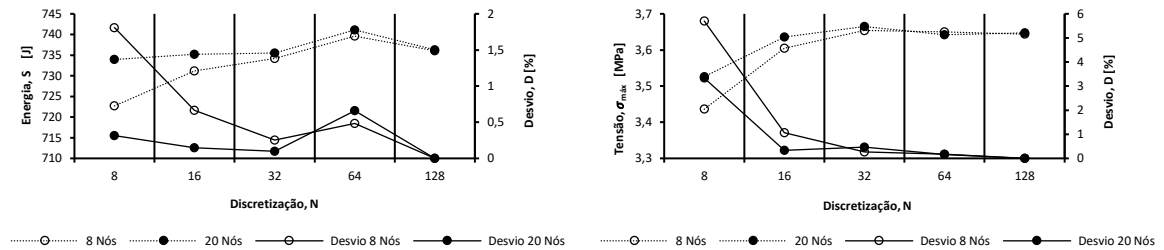


Figura 5.20: Estudo de convergência de malha para o caso corte 1 numa geometria gerada por otimização topológica com constrangimento de volume de 75% e filtro ativo: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão lida no elemento 1, d) Tensão lida no elemento 2. Desvio calculado pela equação (3.1).

5.2.6 Caso corte 1 com constrangimento de volume de 75% sem filtro ativo

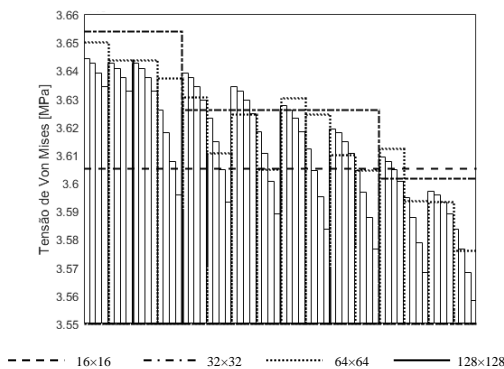
O caso seguinte é igual ao anterior exceto no filtro que está desativado. Na tabela 5.13 observam-se as geometrias geradas por otimização e os respetivos campos de tensão resultantes do carregamento aplicado. Nas três primeiras discretizações (8×8, 16×16 e 32×32) a geometria ótima é sempre igual, apenas nas restantes surgem as diferenças geométricas. Nos campos de tensão da tabela observa-se concentração de tensões nos cantos exteriores da geometria. No gráfico da figura 5.21b a curva da tensão apresenta convergência estável até à discretização 32×32. Mas, a partir da discretização 64×64 existem flutuações na curva, que se devem ao erro de modelação devido às diferenças entre as geometrias. No gráfico da figura 5.21a a curva de energia também mostra convergência crescente para as primeiras discretizações. Mas, a partir da

discretização 64×64 a curva mostra um comportamento convergente diferente, devido ao aparecimento de elementos cinzentos na malha a curva sobrestima o valor da energia.

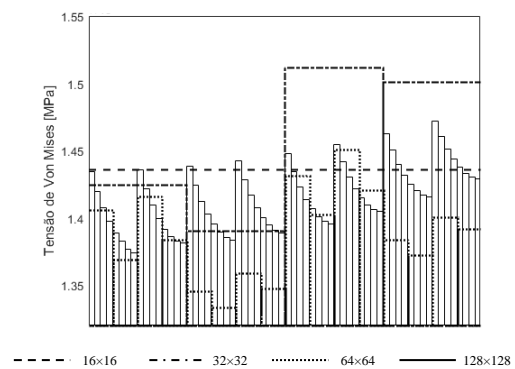


a) Energia da deformação, S

b) Tensão equivalente máxima, σ_{\max}



c) Elemento 1

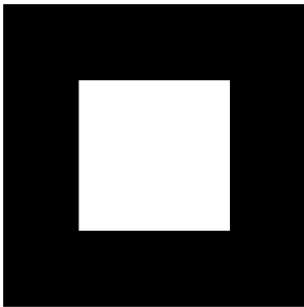
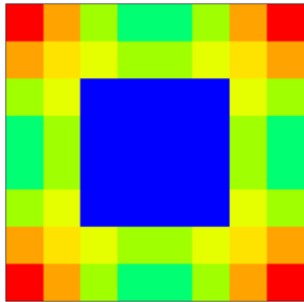
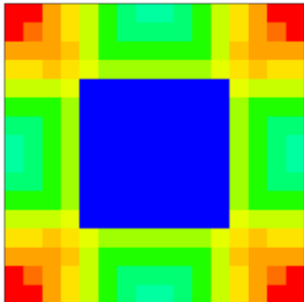
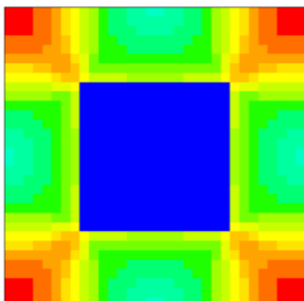
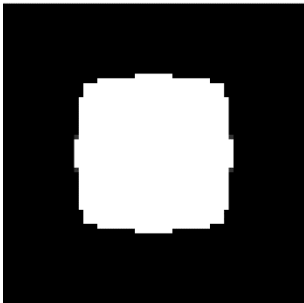
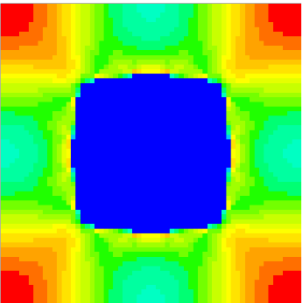
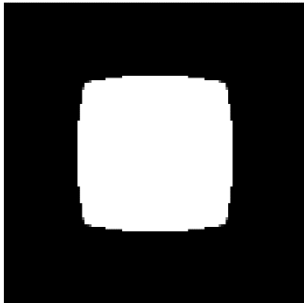
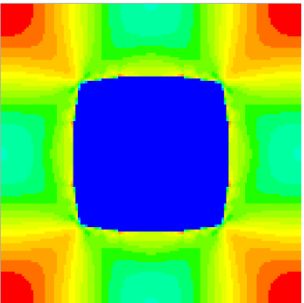


d) Elemento 2

Figura 5.21: Estudo de convergência de malha para o caso corte 1 numa geometria gerada por otimização topológica com constrangimento de volume de 75% e filtro desativado: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão equivalente lida no elemento 1, d) Tensão equivalente lida no elemento 2. Desvio calculado pela equação (3.1).

Nos gráficos das figuras 5.21c e 5.21d estão representadas as tensões equivalentes lidas nos elementos 1 e 2 da figura 5.15. Em ambos os gráficos não é possível identificar convergência da tensão, os valores de tensão nas várias discretizações são oscilantes, o que pode ser resultado do erro de modelação.

Tabela 5.13: Geometrias resultantes da otimização topológica da célula unitária com constrangimento de volume de 75% e filtro desativado. Campo de tensões resultante da aplicação do carregamento corte 1

[Pa].	
Geometria	Campo de Tensões
	<p>8×8</p>  <p> .390E-05 163629 327257 490886 654514 818143 981771 .115E+07 .131E+07 .147E+07 .164E+07 .180E+07 .196E+07 .213E+07 .229E+07 .245E+07 .262E+07 .278E+07 .295E+07 .311E+07 .327E+07 .344E+07 </p>
	<p>16×16</p>  <p> .389E-05 171676 343352 515029 686705 858381 .103E+07 .120E+07 .137E+07 .155E+07 .172E+07 .189E+07 .206E+07 .223E+07 .240E+07 .258E+07 .275E+07 .292E+07 .309E+07 .326E+07 .343E+07 .361E+07 </p>
	<p>32×32</p>  <p> .368E-05 174000 348000 522000 696000 870000 .104E+07 .122E+07 .139E+07 .157E+07 .174E+07 .191E+07 .209E+07 .226E+07 .244E+07 .261E+07 .278E+07 .296E+07 .313E+07 .331E+07 .348E+07 .365E+07 </p>
	<p>64×64</p>  <p> .266E-05 173867 347733 521600 695467 869333 .104E+07 .122E+07 .139E+07 .156E+07 .174E+07 .191E+07 .209E+07 .226E+07 .243E+07 .261E+07 .278E+07 .296E+07 .313E+07 .330E+07 .348E+07 .365E+07 </p>
	<p>128×128</p>  <p> .208E-05 173524 347048 520571 694095 867619 .104E+07 .121E+07 .139E+07 .156E+07 .174E+07 .191E+07 .208E+07 .226E+07 .243E+07 .260E+07 .278E+07 .295E+07 .312E+07 .330E+07 .347E+07 .364E+07 </p>

5.2.7 Caso corte 2 com constrangimento de volume de 50% com filtro ativo

No caso de otimização apresentado a seguir foi aplicado um constrangimento de volume de 50% e o carregamento ao corte 2 (tabela 3.1). Neste caso o filtro utilizado é o de sensibilidades. Na tabela 5.14 estão representados as geometrias obtidas por otimização e os respectivos campos de tensão, onde se verifica a existência de concentrações de tensão. No gráfico da figura 5.22b a curva apresenta convergência decrescente a partir da discretização de 16×16 . No gráfico da figura 5.22a a curva da energia apresenta convergência decrescente desde a primeira discretização. O facto de a convergência ser decrescente já foi explicado anteriormente e deve-se à existência de elementos cinzentos na malha.

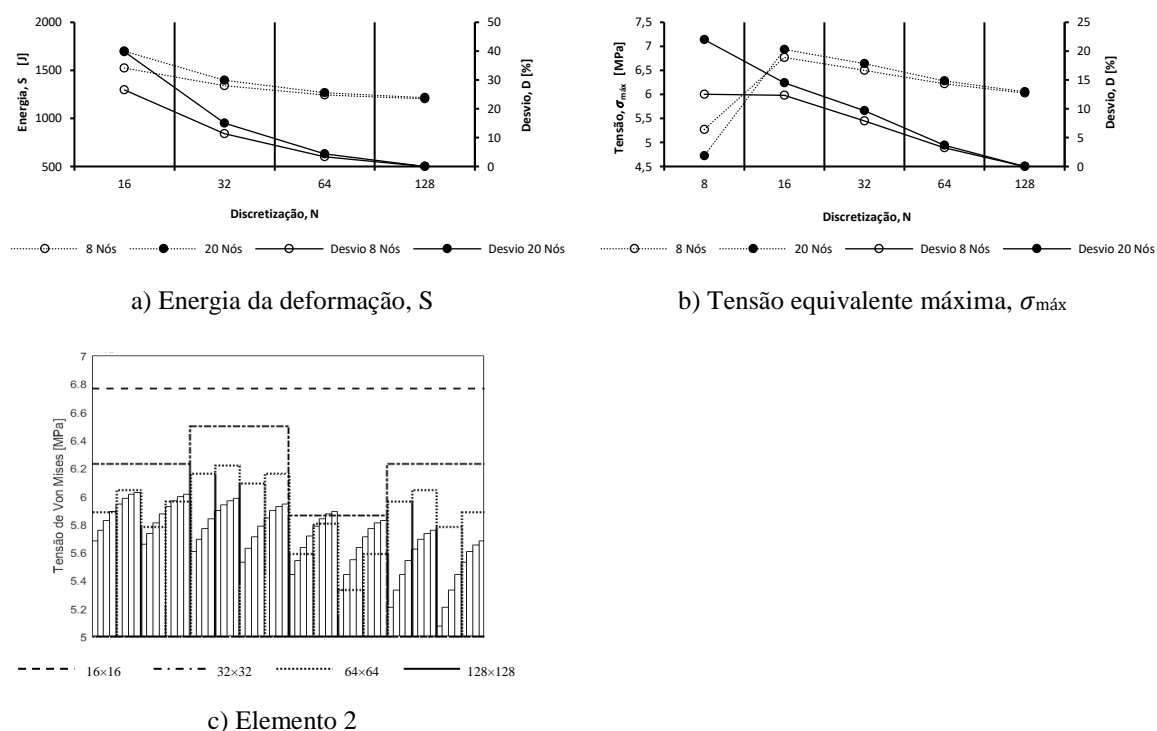
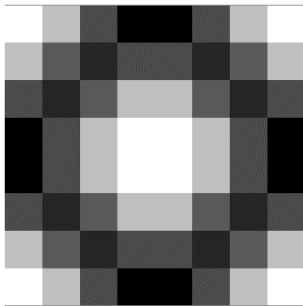
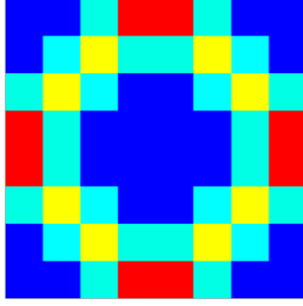
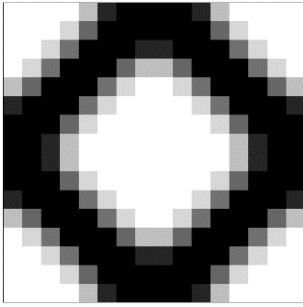
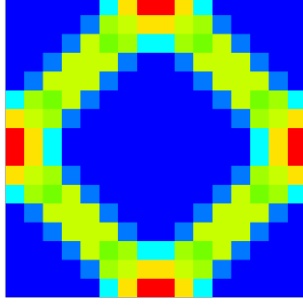
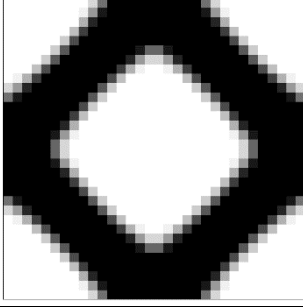
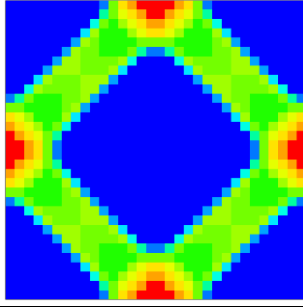
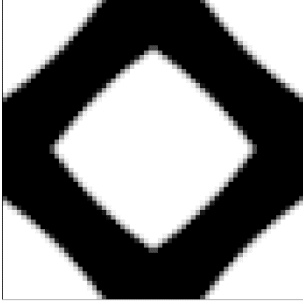
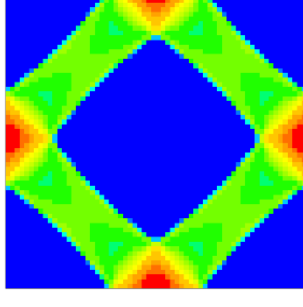
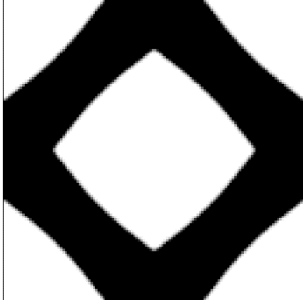
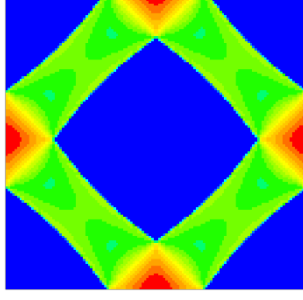


Figura 5.22: Estudo de convergência de malha para o caso corte 2 numa geometria gerada por otimização topológica com constrangimento de volume de 50% e filtro ativo: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão equivalente lida no elemento 2. Desvio é calculado pela equação (3.1).

O gráfico da figura 5.21c representa a tensão equivalente analisada no elemento 2. O elemento 1 não está representado neste caso pois não faz parte da geometria. No gráfico da figura é possível verificar convergência decrescente da tensão na maioria das discretizações.

Tabela 5.14: Geometrias resultantes da otimização topológica da célula unitária com constrangimento de volume de 50% com filtro de densidades ativo para várias discretizações da malha. Campo de tensões resultante da aplicação do carregamento corte 2 nas várias discretizações consideradas.

Geometria		Campo de Tensões
	8×8	 <div data-bbox="1177 421 1284 725"> <p>131.14 251068 502004 752941 .100E+07 .125E+07 .151E+07 .176E+07 .201E+07 .226E+07 .251E+07 .276E+07 .301E+07 .326E+07 .351E+07 .376E+07 .402E+07 .427E+07 .452E+07 .477E+07 .502E+07 .527E+07</p> </div>
	16×16	 <div data-bbox="1177 745 1284 1050"> <p>.710E-05 322357 644714 967071 .129E+07 .161E+07 .193E+07 .226E+07 .258E+07 .290E+07 .322E+07 .355E+07 .387E+07 .419E+07 .451E+07 .484E+07 .516E+07 .548E+07 .580E+07 .612E+07 .645E+07 .677E+07</p> </div>
	32×32	 <div data-bbox="1177 1070 1284 1375"> <p>.524E-05 309514 619029 928543 .124E+07 .155E+07 .186E+07 .217E+07 .248E+07 .279E+07 .310E+07 .340E+07 .371E+07 .402E+07 .433E+07 .464E+07 .495E+07 .526E+07 .557E+07 .588E+07 .619E+07 .650E+07</p> </div>
	64×64	 <div data-bbox="1177 1395 1284 1700"> <p>.470E-05 296190 592381 888571 .118E+07 .148E+07 .178E+07 .207E+07 .237E+07 .267E+07 .296E+07 .326E+07 .355E+07 .385E+07 .415E+07 .444E+07 .474E+07 .504E+07 .533E+07 .563E+07 .592E+07 .622E+07</p> </div>
	128×128	 <div data-bbox="1177 1720 1284 2024"> <p>.452E-05 286890 573781 860671 .115E+07 .143E+07 .172E+07 .201E+07 .230E+07 .258E+07 .287E+07 .316E+07 .344E+07 .373E+07 .402E+07 .430E+07 .459E+07 .488E+07 .516E+07 .545E+07 .574E+07 .602E+07</p> </div>

5.2.8 Caso corte 2 com constrangimento de volume de 50% sem filtro ativo

O caso apresentado a seguir é igual ao anterior, a única diferença está no filtro que está desativado. Na tabela 5.15 são apresentadas as geometrias obtidas por otimização e os correspondentes campos de tensão, onde é possível verificar a existência de singularidades até à discretização 16×16 , passado depois a concentrações de tensão nos cantos da geometria. No gráfico da figura 5.23b observa-se a divergência da curva da tensão até à discretização 32×32 , sendo que nas restantes os valores de tensão oscilam ligeiramente e é impossível confirmar convergência. A razão do comportamento da curva deve-se ao erro de modelação. No gráfico da figura 5.23a a curva demonstra convergência decrescente, sobrestimando o valor da energia da deformação, este facto deve-se à existência de elementos cinzentos na malha da geometria.

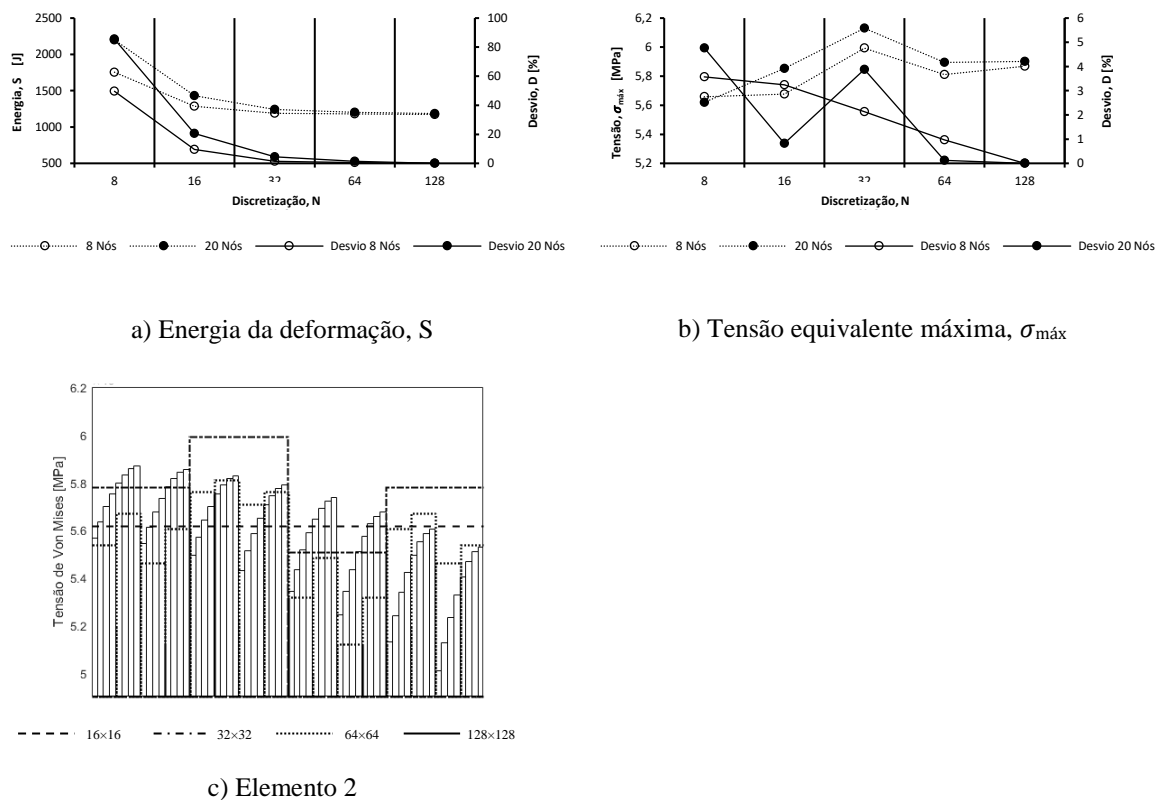
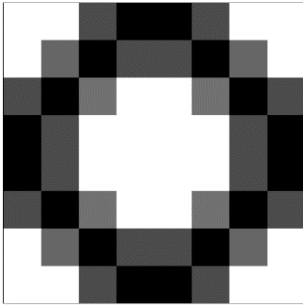
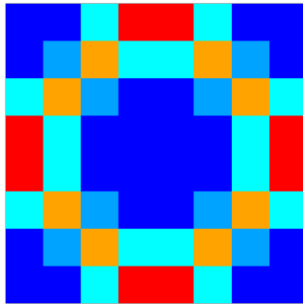
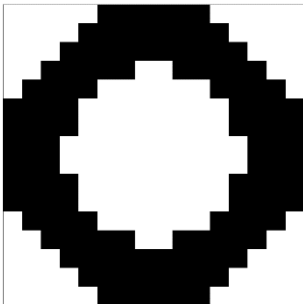
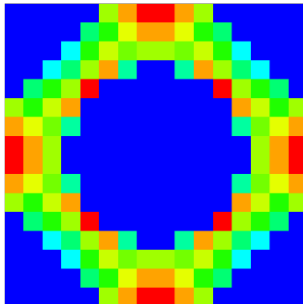
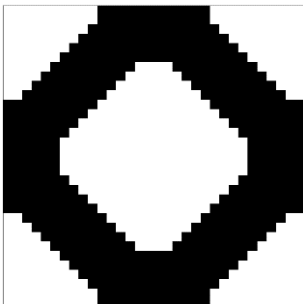
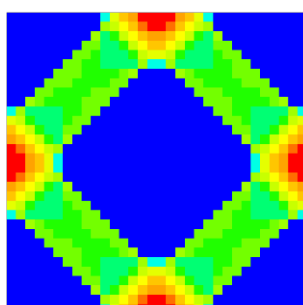
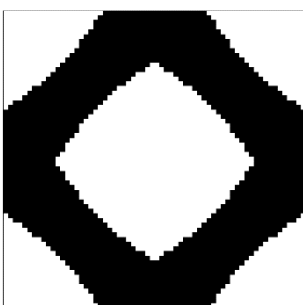
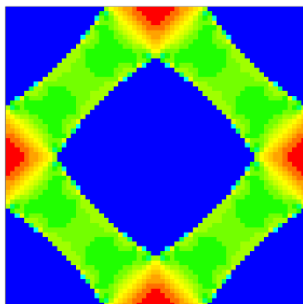
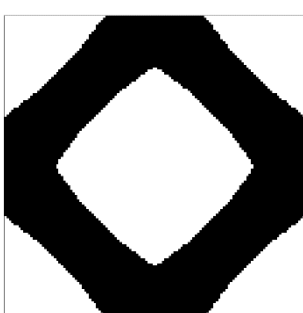
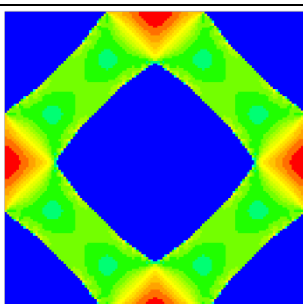


Figura 5.23: Estudo de convergência de malha para o caso corte 2 numa geometria gerada por otimização topológica com constrangimento de volume de 50% e filtro desativado: a) Energia de deformação, b) Tensão equivalente máxima, c) Tensão equivalente lida no elemento 2. Desvio calculado pela equação (3.1).

Tabela 5.15: Geometrias resultantes da otimização topológica da célula unitária com constrangimento de volume de 50% e filtro desativado. Campo de tensões resultante da aplicação do carregamento corte 2 [Pa].

Geometria		Campo de Tensões
	8×8	 <div data-bbox="1177 421 1284 723"> <p> .891E-05 269443 538886 808329 .108E+07 .135E+07 .162E+07 .189E+07 .216E+07 .242E+07 .269E+07 .296E+07 .323E+07 .350E+07 .377E+07 .404E+07 .431E+07 .458E+07 .485E+07 .512E+07 .539E+07 .566E+07 </p> </div>
	16×16	 <div data-bbox="1177 741 1284 1043"> <p> .113E-06 270338 540676 811014 .108E+07 .135E+07 .162E+07 .189E+07 .216E+07 .243E+07 .270E+07 .297E+07 .324E+07 .351E+07 .378E+07 .406E+07 .433E+07 .460E+07 .487E+07 .514E+07 .541E+07 .568E+07 </p> </div>
	32×32	 <div data-bbox="1177 1061 1284 1364"> <p> .416E-05 285386 570771 856157 .114E+07 .143E+07 .171E+07 .200E+07 .228E+07 .257E+07 .285E+07 .314E+07 .342E+07 .371E+07 .400E+07 .428E+07 .457E+07 .485E+07 .514E+07 .542E+07 .571E+07 .599E+07 </p> </div>
	64×64	 <div data-bbox="1177 1382 1284 1684"> <p> .346E-05 276724 553448 830171 .111E+07 .138E+07 .166E+07 .194E+07 .221E+07 .249E+07 .277E+07 .304E+07 .332E+07 .360E+07 .387E+07 .415E+07 .443E+07 .470E+07 .498E+07 .526E+07 .553E+07 .581E+07 </p> </div>
	128×128	 <div data-bbox="1177 1702 1284 2004"> <p> .314E-05 279414 558929 838243 .112E+07 .140E+07 .168E+07 .196E+07 .224E+07 .251E+07 .279E+07 .307E+07 .335E+07 .363E+07 .391E+07 .419E+07 .447E+07 .475E+07 .503E+07 .531E+07 .559E+07 .587E+07 </p> </div>

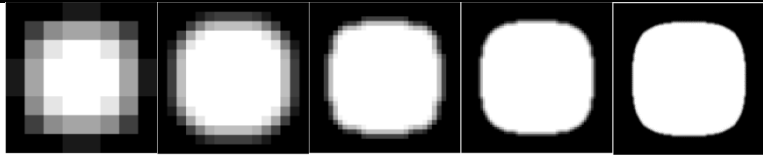

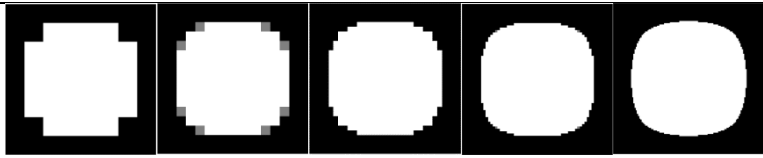

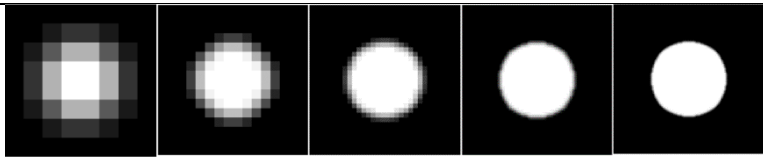

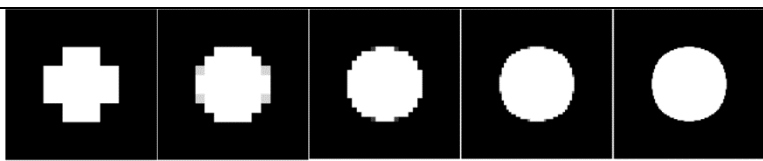
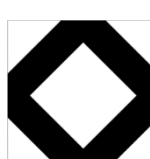
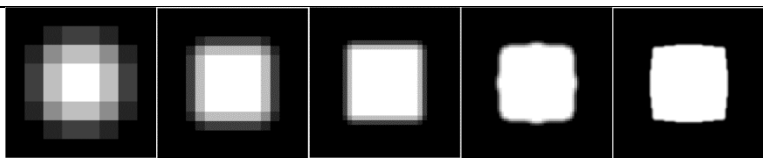
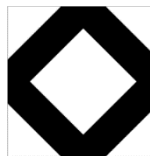
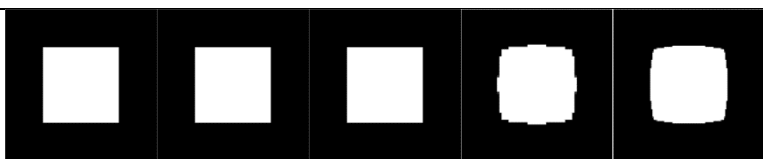
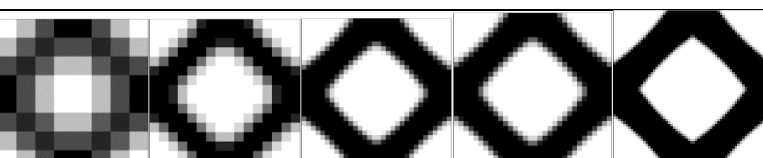
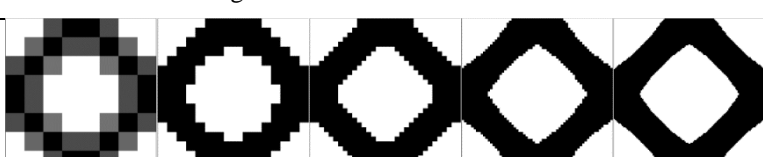
No gráfico da figura 5.23c, que representa a tensão equivalente lida no elemento 2 da figura 5.15, é difícil perceber a existência de convergência. Este elemento está localizado na zona de concentração de tensões da geometria e portanto, à semelhança do que acontece no gráfico da tensão equivalente máxima, os valores da tensão são oscilatórios em cada discretização.

5.3 Estudo comparativo da convergência

Em primeiro lugar, para se proceder a um estudo comparativo entre os resultados da análise de elementos finitos de duas geometrias é necessário garantir que elas são minimamente semelhantes. Com o objetivo de comparar as várias geometrias obtidas por otimização com as geometrias pré-definidas da análise foi criada a tabela 5.16. Em termos das topologias otimizadas, para comparação com a geometria pré-definida é apenas considerada a maior discretização, ou seja, onde a geometria está mais definida. Na tabela 5.16 identifica-se que apenas as geometrias referentes ao caso de otimização topológica da célula unitária com constrangimento de volume de 80% com e sem filtro são suficientemente semelhantes com a geometria pré-definida para se realizar um estudo comparativo. Em todas as geometrias restantes o erro de modelação associado pode levar a conclusões erradas num estudo comparativo, por isso serão descartadas.

Na figura 5.24 apresenta-se o estudo comparativo entre a geometria pré-definida do furo com fracção volúmica de 80% em malha não-quadrangular e as geometrias otimizadas para o caso hidrostático com fracção volúmica de 80% com e sem filtro ativo. Consideram-se as curvas da geometria pré-definida como o termo de comparação exato. Na figura 5.24a a curva da malha quadrangular para a otimização s/filtro converge rapidamente para o valor exato da energia enquanto a curva com filtro apresenta convergência mais lenta. Ambas as curvas sobrestimam o valor da energia que resulta da existência de elementos cinzentos na malha de EF, mas na curva com filtro existem muito mais elementos destes que tornam a convergência mais lenta. Na figura 5.24b a curva da malha quadrangular para otimização s/filtro, além de apresentar um comportamento divergente também está bastante afastada da curva da malha não-quadrangular. Por sua vez, a curva da malha quadrangular para otimização com filtro, a partir da discretização de 32×32 , mostra convergência e a curva coincide com a da malha não-quadrangular nas três últimas discretizações.

Tabela 5.16: Representação das geometrias otimizadas e as suas equivalentes pré-definidas.

Geometrias otimizadas					Geometrias pré-definidas
					 Hidrostático
Constrangimento de volume de 50% com filtro					
					 Hidrostático
Constrangimento de volume de 50% sem filtro					
					 Corte 1
Constrangimento de volume de 80% com filtro					
					 Corte 2
Constrangimento de volume de 80% sem filtro					
					 Corte 2
Constrangimento de volume de 75% com filtro					
					
Constrangimento de volume de 75% sem filtro					
					
Constrangimento de volume de 50% com filtro					
					
Constrangimento de volume de 50% sem filtro					

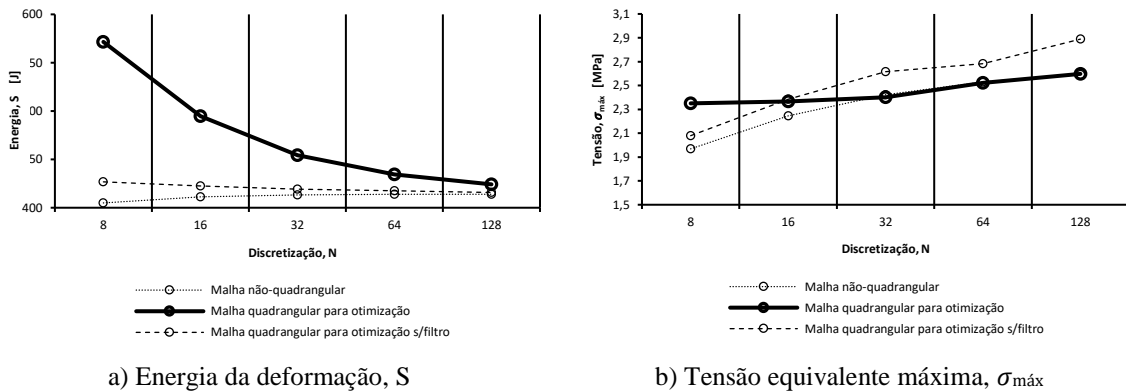


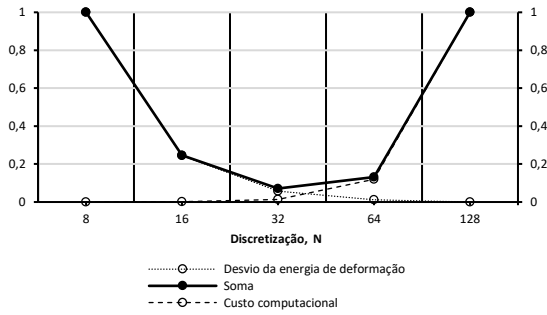
Figura 5.24: Representação do estudo comparativo entre a geometria pré-definida do furo com fração volumica de 80% em malha não quadrangular e a geometria otimizada para o caso hidrostático com fração volumica de 80% com e sem filtro. a) Energia de deformação e b) Tensão equivalente máxima.

5.4 Compromisso entre precisão e custo computacional

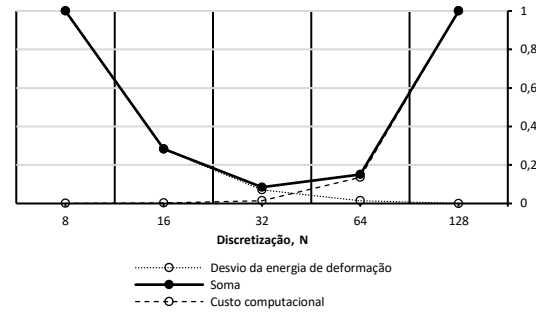
Nesta secção é introduzido o estudo do compromisso entre a precisão dos resultados e o custo computacional. O estudo está dividido em análise e otimização, na análise são consideradas as geometrias pré-definidas do furo circular em malha não-quadrangular com fração volumica de 50% e 80%, e para os casos de corte do furo quadrado e o furo quadrado com rotação de 45° em malha quadrangular. Na parte da otimização foram consideradas as otimizações do carregamento hidrostático com fração volumica de 50% e 80% com o filtro ativado e as otimizações dos dois casos de corte, também com o filtro ativado.

Na figura 5.25 está representado o estudo da análise. O mínimo da curva de compromisso em todos os casos está na discretização 32×32, o que pode levar a conclusões erradas pois a curva é aproximada por funções lineares. Na realidade, o mínimo da curva de soma estará próximo da intersecção das curvas do desvio da energia de deformação e custo computacional, ou seja, entre a discretização de 32×32 e 64×64.

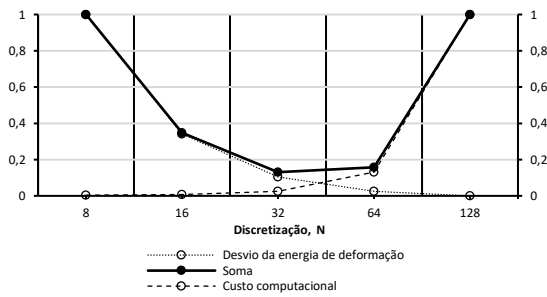
Na figura 5.26 está representado o estudo da otimização. Neste caso, o mínimo da curva de compromisso está na discretização 32×32 para o caso da otimização com fração volumica de 50% e com carregamento hidrostático e para a otimização com fração volumica de 50% e carregamento corte 2, e nos outros dois casos o mínimo está na discretização 64×64. Mas observando a intersecção das curvas do desvio da energia de deformação e custo computacional, constata-se mais uma vez que o melhor compromisso se situa entre as discretizações de 32×32 e 64×64.



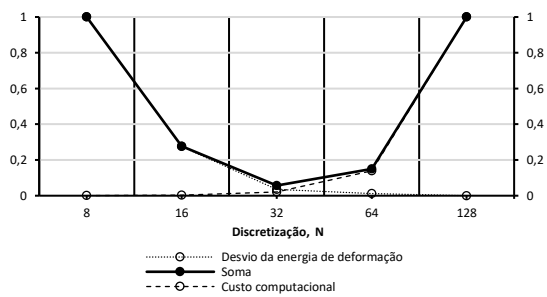
a) Furo circular com fração volúmica de 50% e malha não-quadrangular



b) Furo circular com fração volúmica de 80% e malha não-quadrangular



c) Furo quadrado corte 1



d) Furo quadrado com rotação 45° em malha quadrangular corte 2

Figura 5.25: Estudo de compromisso entre o desvio da energia de deformação e o custo computacional para a análise das geometrias p´re-definidas. a) Furo circular com fração volúmica de 50% e malha não-quadrangular, b) Furo circular com fração volúmica de 80% e malha não-quadrangular, c) Furo quadrado corte 1, d) Furo quadrado com rotação 45° em malha quadrangular corte 2

Na figura 5.27 estão representadas todas as curvas de compromisso apresentadas nas figuras 5.25 e 5.26, aproximadas por uma função interpoladora. É possível distinguir as curvas da análise (marcador circular) das da otimização (marcador cruz). Entre os dois conjuntos de curvas verifica-se que o mínimo da otimização está ligeiramente mais à direita que o da análise, porém encontram-se todos no mesmo intervalo de valores, entre as discretizações 40×40 e 55×55.

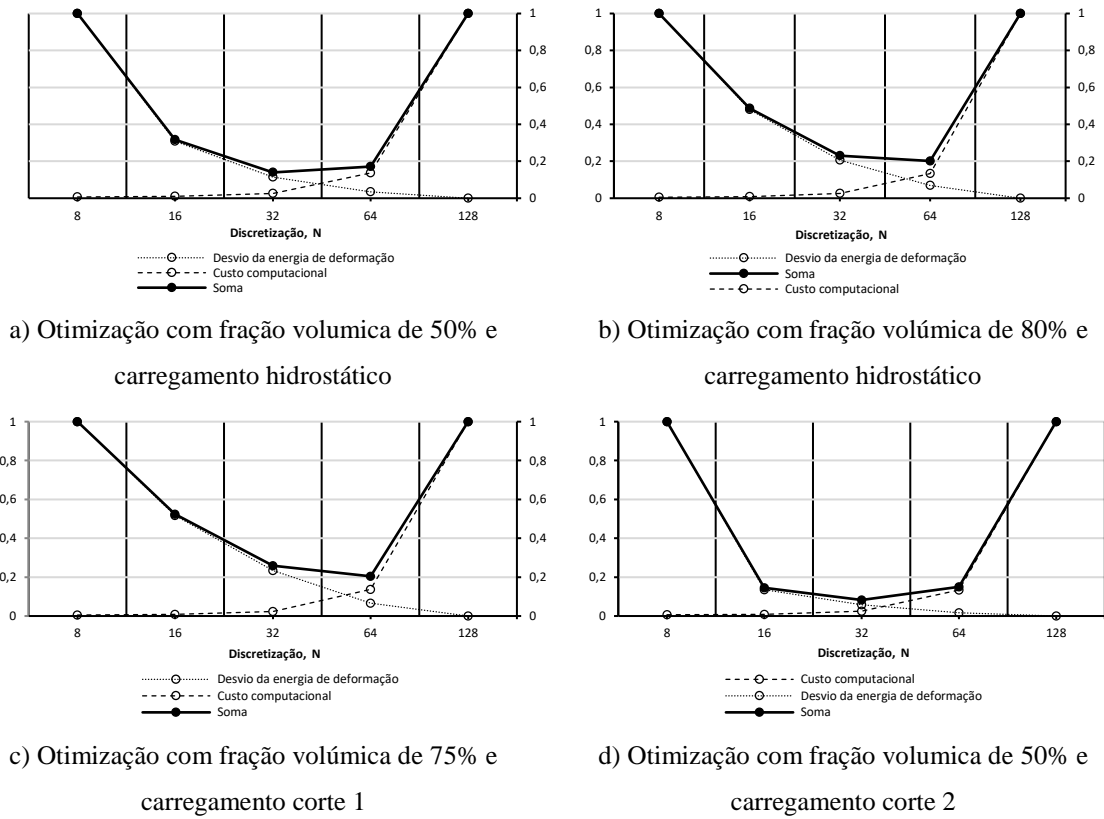


Figura 5.26: Estudo de compromisso entre o desvio da energia de deformação e o custo computacional para a otimização de célula unitária. a) Otimização com fração volúmica de 50% e carregamento hidrostático, b) Otimização com fração volúmica de 80% e carregamento hidrostático, c) Otimização com fração volúmica de 75% e carregamento corte 1, d) Otimização com fração volúmica de 50% e carregamento corte 2.

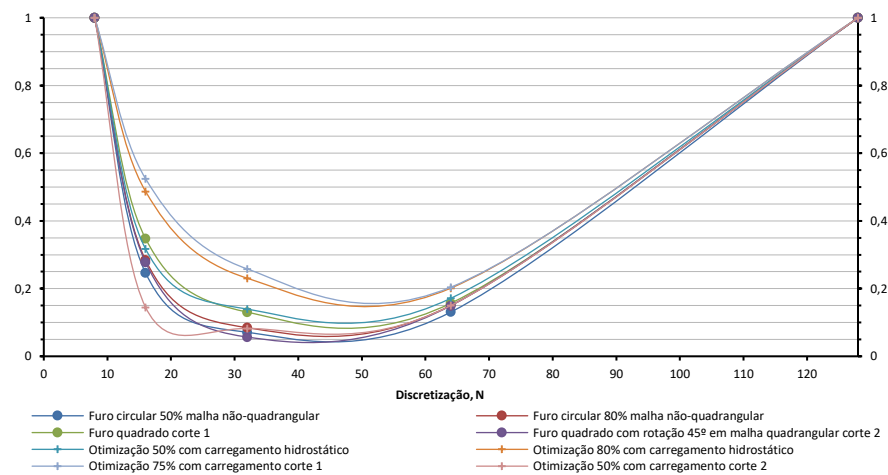


Figura 5.27: Representação das curvas de compromisso da análise e da otimização.

6 Conclusões e desenvolvimentos futuros

Esta dissertação apresenta uma contribuição ao nível da análise dos problemas de não-linearidade e singularidade em otimização topológica de estruturas e materiais com critérios de tensão. Para o desenvolvimento futuro da aplicação de critérios de tensão a problemas de otimização topológica é necessário conhecer e saber interpretar o comportamento da tensão ao nível da célula unitária no contexto de um material compósito de microestrutura periódica. Com o objetivo de estudar a convergência da tensão em geometrias de células unitárias obtidas por otimização topológica com constrangimento de volume foi necessário conhecer e compreender primeiro os vários desafios associados à aplicação de critérios de tensão a problemas de otimização topológica.

O estudo inicia-se com uma revisão bibliográfica acerca da otimização topológica e da aplicação de critérios de tensão. São estudadas as dificuldades associadas à aplicação de constrangimentos de tensão das quais se destacam, o problema da singularidade, a natureza local dos constrangimentos e a não-linearidade da função da tensão. Aqui são também introduzidos os métodos de relaxamento da tensão, *ε -relaxation* e *qp-approach* estudados por vários autores e que têm como objetivo ultrapassar estas dificuldades. Seguindo o raciocínio exposto por este estudo é introduzido o problema de uma estrutura reticulada de três barras onde são exploradas as aplicações destes métodos de relaxamento da tensão de uma forma muito simples. Os resultados da aplicação do *qp-approach* ao problema da estrutura foram bastante satisfatórios e em concordância com a publicação de Bruggi (2008). Confirmou-se que à medida que a diferença entre os expoentes de penalização, p e q , tende para 0 o problema relaxado aproxima-se do origi-

nal, conseguindo-se assim evitar, à partida, o aparecimento de zonas degeneradas no domínio admissível do problema. Quanto ao ε -relaxation, demonstrou-se que, embora aplicado a um problema de otimização muito simples, é possível obter resultados bastante satisfatórios do ótimo global. À medida que ε tende 0 é possível obter o resultado quase exacto do ponto ótimo global do problema original. Ambos os métodos foram comparados e conclui-se que para problemas no contínuo o *qp-approach* é o método mais adequado pois relaxa a função com maior suavidade ao longo de toda a extensão do domínio, enquanto o ε -relaxation é mais indicado para problemas em domínio discreto.

Depois de conhecidas as dificuldades associadas a aplicação de critérios de tensão procedeu-se ao estudo de convergência de malha de elementos finitos. Este estudo foi dividido em duas partes, a primeira focada na análise de geometrias pré-definidas e a segundo no estudo de geometrias obtidas através da resolução de um problema de otimização topológica, formulado como a minimização da *compliance* sujeito a constrangimentos de volume. Foram consideradas para o estudo as discretizações de 8×8 , 16×16 , 32×32 , 64×64 e 128×128 . Em relação ao estudo de convergência de malha utilizando algumas geometrias pré-definidas foi possível evitar os erros associados à modelação da geometria e obter os melhores resultados de convergência da tensão apenas levando em conta erros de discretização. Os únicos casos onde não foi possível obter bons resultados neste estudo foi quando se utilizaram elementos quadrados para malhar geometrias com fronteiras curvas, como o caso de uma célula unitária com um furo circular. Neste caso, além de não ser possível chegar à fração volúmica pretendida, a existência de singularidades de tensão em conjunto com erros de modelação e discretização produziu grandes flutuações nos resultados. Quanto ao estudo de convergência de malha das geometrias obtidas por otimização topológica os resultados obtidos foram bastante elucidativos acerca do comportamento da tensão e da energia de deformação na célula unitária otimizada. Verificou-se que, em todos os casos estudados, quando a célula unitária era otimizada com ou sem filtro ativo a energia de deformação convergiu sempre, mas sobrestimando o valor exato da energia. Este comportamento foi algo inesperado, mas compreendeu-se que, devido à existência de elementos de densidade intermédia na malha, que possuem uma elevada *compliance* em relação aos elementos sólidos ($\rho = 1$), a energia de deformação é maior. Quanto à convergência da tensão, os casos estudados com o filtro ativo apresentam os melhores resultados em relação aos sem filtro, onde a tensão tende a divergir. Apesar de em alguns casos a convergência da tensão não ser completamente evidente é possível afirmar que a utilização do filtro impede a formação de singularidades e permite que a tensão na célula unitária convirja.

Relativamente à comparação de resultados entre os dois estudos de convergência, análise e otimização, confirmou-se que os resultados produzidos pela geometria otimizada para o caso

hidrostático com fração volúmica de 80% com o filtro ativo convergem e são bastante próximos dos resultados obtidos pela geometria pré-definida do furo circular em malha não-quadrangular para a mesma fração volúmica. As diferenças que se observam ao nível da energia de deformação são causadas pela existência de elementos cinzentos na malha da geometria otimizada, porém verifica-se a existência de convergência para o mesmo valor exato que a geometria pré-defina. Em termos da precisão dos resultados e o custo computacional verificou-se que o melhor compromisso se obtém com uma discretização de malha de EF entre 40×40 e 55×55 .

Nesta dissertação foi realizado um estudo de convergência de malha utilizando geometrias geradas por otimização topológica com constrangimentos de volume ao nível da célula unitária. Este estudo permitiu compreender a dependência do campo de tensão relativamente a uma malha de elementos finitos e, para além disso, encontrar o melhor compromisso entre a precisão dos resultados e o custo computacional. Parte dos resultados publicados nesta tese estão também apresentados em Coelho et al (2017). Estes resultados são então importantes para prosseguir com o trabalho de investigação científica envolvendo otimização topológica com constrangimentos de tensão. Também seria de interesse científico comparar os resultados obtidos no estudo de convergência de malha com o modelo numérico do compósito repetindo a célula unitária um número finito de vezes e, ainda, comparar isso com as estimativas do campo de tensão dadas pela teoria da homogeneização.

Referências bibliográficas

- A**miano, D. A. (2015). Análise e otimização de materiais compósitos de microestrutura periódica. Tese de Mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa.
- Ashby, M. F., & Jones, D. R. H. (1996). Engineering Materials 1. Engineering Materials 1, 322.
- B**endsøe, M. P. (1989). Optimal shape design as a material distribution problem. Structural Optimization, 202, 193–202.
- Bendsøe, M. P., & Kikuchi, N. (1988). Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 71, 197–224.
- Bendsøe, M. P., & Sigmund, O. (2003). Topology optimization: Theory, methods, and applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Bruggi, M. (2008). On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization. Structural and Multidisciplinary Optimization, 36(2), 125–141.
- Bruggi, M., & Venini, P. (2007). A mixed FEM approach to stress-constrained topology optimization. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1693–1714.
- Bruns, T. E., & Tortorelli, D. A. (2001). Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190(26–27), 3443–3459.
- C**heng, G. D., & Guo, X. (1997). Epsilon-relaxed approach in structural topology optimization. Structural Optimization, 13(4), 258–266.
- Coelho, P. G., & Cardoso, J. B. (2012). Métodos Computacionais em Engenharia Mecânica. Apontamentos da disciplina de Método Computacionais em Engenharia Mecânica, Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa.
- Coelho, P. G., Gonçalves, G. M., Guedes, J. M., & Cardoso, J. B. (2017). Addressing the non-linearity and singularity phenomena of stress-based optimal design of material microstructures. VII International Conference on Computational Methods for Coupled Problems in Science and Engineering, Coupled Problems 2017.

Colominas, I., Casteleiro, M., Navarrina, F., & Muin, I. (2005). Topology optimization of structures : A minimum weight approach with stress constraints, 36, 599–606.

Deaton, J. D., & Grandhi, R. V. (2014). A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: Post 2000. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 49(1), 1–38.

Dorn, W. S., Gomory, R. E., & Greenberg, H. J. (1964). Automatic design of optimal structures.

Duysinx, P., & Bendsøe, M. P. (1998). Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43, 1453–1478.

Duysinx, P., & Sigmund, O. (1998). New Developments in Handling Stress Constraints in Optimal Material Distributions. *Proceedings of 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Design Optimization*, (1), 98-4906.

Ferreira, R. T. L., Rodrigues, H. C., Guedes, J. M., & Hernandez, J. A. (2014). Hierarchical optimization of laminated fiber reinforced composites. *Composite Structures*, 107(1), 246–259.

Guedes, J. M., & Kikuchi, N. (1990). Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 83, 143–198.

Guilherme, C. E. M., & Fonseca, J. S. O. (2007). Topology optimization of continuum structures with epsilon-relaxed stress constraints. *International Symposium on Solid Mechanics, Solid mechanics in Brazil*. 240–250.

Hellard, G. A. (2008). A Long Story of Innovations and Experiences Composites in Airbus, 1–26. Consultado a 16 de Março de 2017, disponível em https://www.airbusgroup.com/dam/assets/airbusgroup/int/en/investor-relations/documents/2008/presentations/GIF2008/gif2008_workshop_composites_h

Holmberg, E., Torstenfelt, B., & Klarbring, A. (2013). Stress constrained topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 48(1), 33–47.

- K**irsch, U. (1990). On singular topologies in optimum structural design. *Structural Optimization*, 2(3), 133–142.
- Krog, L., Tucker, A., Kemp, M., & Boyd, R. (2004). Topology Optimisation of Aircraft Wing Box Ribs. 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, 1–16.
- L**ee, C., Norato, J., Bruns, T., Ha, C., & Tortorelli, D. (2010). Stress-based topology optimization for continua. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 41(4), 605–620.
- Lee, E. (2012). Stress-Constrained Structural Topology Optimization with Design-Dependent Loads. Tese de Mestrado, University of Toronto.
- Lee, E., James, K. A., & Martins, J. R. R. A. (2012). Stress-constrained topology optimization with design-dependent loading. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 46(5), 647–661.
- P**arís, J., Navarrina, F., Colominas, I., & Casteleiro, M. (2007). Global Versus Local Statement Of Stress Constraints In Topology Optimization Of Continuum Structures, 91, 11.
- París, J., Navarrina, F., Colominas, I., & Casteleiro, M. (2009). Topology optimization of continuum structures with local and global stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 39(4), 419–437.
- París, J., Navarrina, F., Colominas, I., & Casteleiro, M. (2010). Block aggregation of stress constraints in topology optimization of structures. *Advances in Engineering Software*, 41(3), 433–441.
- Pereira, J. T., Fancello, E. A., & Barcellos, C. S. (2004). Topology optimization of continuum structures with material failure constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 26(1–2), 50–66.
- Q**iu, G. Y., & Li, X. S. (2010). A note on the derivation of global stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 40(1–6), 625–628.
- R**ozvany, G. I. N., Zhou, M., & Birker, T. (1992). Generalized shape optimization without homogenization. *Structural Optimization*, 4(3), 250–252.

- S**igmund, O. (1994). Materials with prescribed constitutive parameters: An inverse homogenization problem. *International Journal of Solids and Structures*, 31(17), 2313–2329.
- Sigmund, O. (2001). A 99 line topology optimization code written in matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21(2), 120–127.
- Sigmund, O. (2007). Morphology-based black and white filters for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 33(4–5), 401–424.
- Sigmund, O., & Bendsøe, M. (2004). Topology optimization: from airplanes to nanooptics. *Bridging, from Technology to Society*, 40–51.
- Stolpe, M., & Svanberg, K. (2001). On the trajectories of the epsilon-relaxation approach for stress-constrained truss topology optimization, (1994), 140–151.
- Sved, G., & Ginos, Z. (1968). Structural optimization under multiple loading. *International Journal of Mechanical Sciences*, 10(10), 803–805.
- V**erbart, A. (2015). Topology Optimization with Stress Constraints. Tese de Doutorado, TU Delft, Delft University of Technology.
- Verbart, A., Langelaar, M., & Keulen, F. Van. (2016). Damage approach : A new method for topology optimization with local stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 1081–1098.
- Verbart, A., Langelaar, M., & Keulen, F. Van. (2013). A new approach for stress-based topology optimization: Internal stress penalization. 10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, Orlando, Florida, USA, 1–10.
- Y**alamanchili, V. K. (2012). Topology optimization of structures using global stress. Tese de Mestrado, University of Florida.
- Young, W. C., & Budynas, R. G. (2002). Roark's Formulas for Stress and Strain. Library (Vol. 7).

Anexos

Anexos I

Nas figuras seguintes estão representadas a malha de elementos finitos para a treliça de três barras e os graus de liberdade respectivos em cada nó.

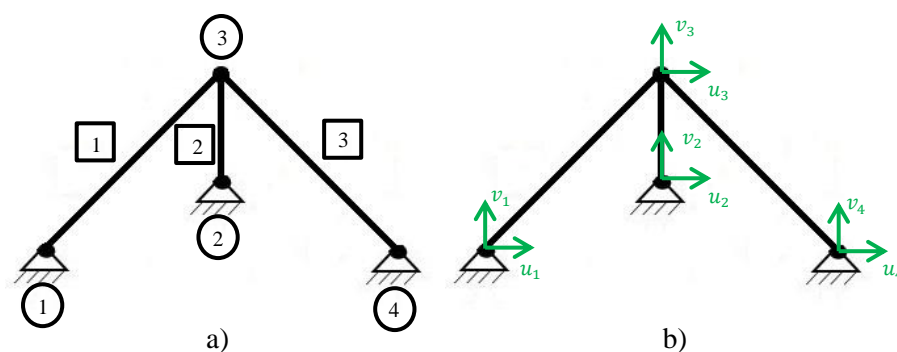


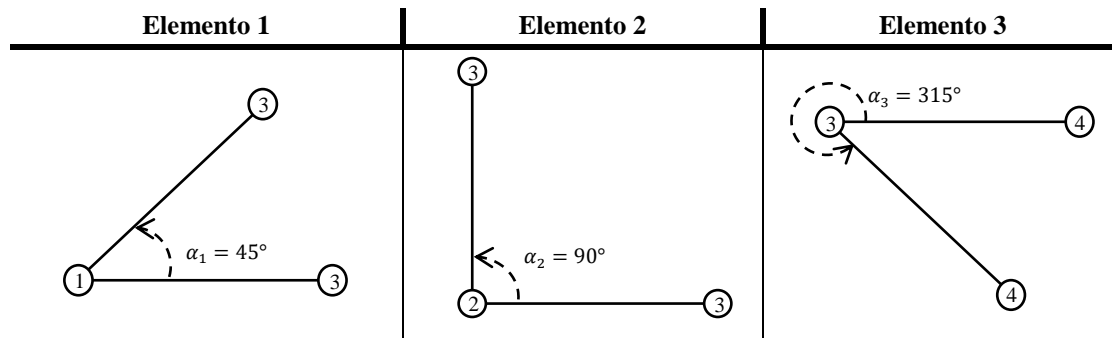
Figura A.1: a) Malha de EF da estrutura reticulada. b) Graus de liberdade de cada nó da estrutura.

Relativamente aos graus de liberdade, na seguinte tabela estão representados os graus de liberdade ativos e os inativos.

Tabela A.1: Graus de liberdade ativos e inativos em cada nó da treliça.

Grau de liberdade	Estado
$u_1 = 0$	Inativo
$v_1 = 0$	Inativo
$u_2 = 0$	Inativo
$v_2 = 0$	Inativo
$u_3 \neq 0$	Ativo
$v_3 \neq 0$	Ativo
$u_4 = 0$	Inativo
$v_4 = 0$	Inativo

Em seguida, na tabela A.2 apresentam-se as transformações de coordenadas dos três elementos, do seu referencial local para o referencial global da matriz de rigidez da estrutura.

Tabela A.2: Transformação de coordenadas dos elementos, com as respetivas rotações.

Uma vez que as transformações de coordenadas estão concluídas e todos os elementos estão no mesmo referencial, global, pode-se proceder à assemblagem das matrizes de cada elemento para obter a matriz de rigidez da estrutura $[K]$. Esta matriz terá a dimensão de 8×8 , e será apresentada de forma simbólica na tabela A.3.

Tabela A.3: Representação simbólica da assemblagem das matrizes de cada elemento.

	u_1	v_1	u_2	v_2	u_3	v_3	u_4	v_4
u_1	1				1			
v_1								
u_2			2	2	2			
v_2								
u_3	1		2		1+2+3		3	
v_3								
u_4					3		3	
v_4								

Em seguida procede-se à assemblagem das matrizes de rigidez global de cada elemento. Para tal recorre-se à tabela A.4 onde estão representadas as matrizes genéricas de rigidez locais e globais de cada elemento da estrutura. A matriz de rigidez global é apresentada na equação (A.1) e foi deduzida pela equação (4.8). Na tabela A.4 foram substituídos os valores dos ângulos de cada barra pois são iguais em ambos os casos de estudo. Nesta representação as matrizes foram formuladas com o método SIMP, onde o módulo de Young E_i é substituído por uma lei de penalização da densidade, $\rho_i^p E_{0i}$, como foi explicado no capítulo 2.

$$[\mathbf{K}_g] = \frac{\rho_i^p A_i E_{0i}}{L_i} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \text{sen} \alpha \times \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & -\text{sen} \alpha \times \cos \alpha \\ \text{sen} \alpha \times \cos \alpha & \text{sen}^2 \alpha & -\text{sen} \alpha \times \cos \alpha & -\text{sen}^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\text{sen} \alpha \times \cos \alpha & \cos^2 \alpha & \text{sen} \alpha \times \cos \alpha \\ -\text{sen} \alpha \times \cos \alpha & -\text{sen}^2 \alpha & \text{sen} \alpha \times \cos \alpha & \text{sen}^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Tabela A.4: Representação das matrizes genéricas de rigidez local e global de cada elemento da estrutura.

Elementos	$[\mathbf{K}_l]$	$[\mathbf{K}_g]$
1 $\alpha_1 = 45^\circ$	$\begin{bmatrix} \frac{\rho_1^p A_1 E_{01}}{L_1} & -\frac{\rho_1^p A_1 E_{01}}{L_1} \\ -\frac{\rho_1^p A_1 E_{01}}{L_1} & \frac{\rho_1^p A_1 E_{01}}{L_1} \end{bmatrix}$	$\frac{\rho_1^p A_1 E_{01}}{L_1} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$
2 $\alpha_2 = 90^\circ$	$\begin{bmatrix} \frac{\rho_2^p A_2 E_{02}}{L_2} & -\frac{\rho_2^p A_2 E_{02}}{L_2} \\ -\frac{\rho_2^p A_2 E_{02}}{L_2} & \frac{\rho_2^p A_2 E_{02}}{L_2} \end{bmatrix}$	$\frac{\rho_2^p A_2 E_{02}}{L_2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3 $\alpha_3 = 315^\circ$	$\begin{bmatrix} \frac{\rho_3^p A_3 E_{03}}{L_3} & -\frac{\rho_3^p A_3 E_{03}}{L_3} \\ -\frac{\rho_3^p A_3 E_{03}}{L_3} & \frac{\rho_3^p A_3 E_{03}}{L_3} \end{bmatrix}$	$\frac{\rho_3^p A_3 E_{03}}{L_3} \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

A montagem das matrizes de rigidez global de cada elemento $[\mathbf{K}_g]$ está representada na equação (A.2). De maneira a simplificar a representação da matriz da estrutura genérica, as variáveis que dizem respeito a cada elemento barra serão substituídas por uma letra como se observa na tabela A.5. Devido ao facto de a estrutura apresentar graus de liberdade inativos como se pode observar na Tabela 7-1, a matriz $[\mathbf{K}]$ genérica será simplificada para evitar um caso de matriz singular. As simplificações serão apresentadas a seguir.

Tabela A.5: Representação das variáveis de cada barra por uma letra.

Elemento	Variáveis	Representação
1	$\frac{\rho_1^p A_1 E_{01}}{L_1}$	<i>G</i>
2	$\frac{\rho_2^p A_2 E_{02}}{L_2}$	<i>H</i>
3	$\frac{\rho_3^p A_3 E_{03}}{L_3}$	<i>J</i>

Na equação (A.2) observa-se a aplicação da equação (4.11), onde, para efeitos de simplificação de cálculos se utilizou a substituição das variáveis por letras representativas:

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \\ f_{4x} \\ f_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}G & \frac{1}{2}G & 0 & 0 & -\frac{1}{2}G & -\frac{1}{2}G & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}G & \frac{1}{2}G & 0 & 0 & -\frac{1}{2}G & -\frac{1}{2}G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H & 0 & -H & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}G & -\frac{1}{2}G & 0 & 0 & \frac{1}{2}G + \frac{1}{2}J & \frac{1}{2}G - \frac{1}{2}J & -\frac{1}{2}J & \frac{1}{2}J \\ -\frac{1}{2}G & -\frac{1}{2}G & 0 & -H & \frac{1}{2}G - \frac{1}{2}J & \frac{1}{2}G + \frac{1}{2}J + H & \frac{1}{2}J & -\frac{1}{2}J \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}J & \frac{1}{2}J & \frac{1}{2}J & -\frac{1}{2}J \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}J & -\frac{1}{2}J & -\frac{1}{2}J & \frac{1}{2}J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Em seguida procede-se à aplicação das condições fronteira, dos apoios fixos e forças nodais, que se traduz no seguinte:

No vetor dos deslocamentos, são conhecidos os valores:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0 \\ v_1 &= 0 \\ u_2 &= 0 \\ v_2 &= 0 \\ u_3 &\neq 0 \\ v_3 &\neq 0 \\ u_4 &= 0 \\ v_4 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

No vetor das forças sabe-se que:

- Para o caso de carga P_1 ,

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \\ f_{4x} \\ f_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

- Para o caso de carga P_2 ,

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \\ f_{4x} \\ f_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Isolando a 5ª e 6ª linha da matriz, obtém-se o seguinte sistema de onde se extrai a matriz de rigidez da estrutura \mathbf{K} simplificada:

$$\begin{Bmatrix} f_{3x} \\ f_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}G + \frac{1}{2}J & \frac{1}{2}G - \frac{1}{2}J \\ \frac{1}{2}G - \frac{1}{2}J & \frac{1}{2}G + \frac{1}{2}J + H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Finalmente, sabendo que pelos dados da estrutura do problema que $G = J$, a matriz de rigidez da estrutura genérica $[\mathbf{K}]$ pode ser representada como:

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} \frac{\rho_1^p A_1 E_{01}}{L_1} & 0 \\ 0 & \frac{\rho_1^p A_1 E_{01}}{L_1} + \frac{\rho_2^p A_2 E_{02}}{L_2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Para o 1º caso de estudo, onde não se considera o método SIMP, o expoente p toma o valor de 0 ($p = 0$).

De seguida são deduzidas as expressões dos deslocamentos em relação a cada caso de carga. Da equação (A.3) conhecem-se os valores de todos os deslocamentos exceto u_3 e v_3 . Portanto, da aplicação da equação (4.11) para cada caso de carga obtém-se os seguintes deslocamentos:

- Caso de carga P_1 :

$$\begin{cases} u_3 = 0 \\ v_3 = \frac{P_1 L_1 L_2}{\rho_1^p A_1 E_{01} L_2 + \rho_2^p A_2 E_{02} L_1} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

- Caso de carga P_2 :

$$\begin{cases} u_3 = \frac{P_2 L_1}{\rho_1^p A_1 E_{01}} \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Procede-se agora à dedução das expressões que calculam os esforços nos elementos. Para tal, considera-se a equação (4.12), as expressões das equações (A.8) e (A.9) e as matrizes de rigidez locais da tabela A.4. Tendo em conta os diferentes deslocamentos provocados por cada caso de carga obtém-se a seguinte tabela.

Tabela A.6: Expressões genéricas para o cálculo dos esforços nos elementos, aplicáveis a ambos os casos de estudo.

Número do Elemento	Esforços em cada nó	Caso de carga, P_1	Caso de carga, P_2
1	f_1	$-\frac{\rho_1^p A_1 E_{01}}{L_1} \cdot \frac{P_1 L_1 L_2}{\rho_1^p A_1 E_{01} L_2 + \rho_2^p A_2 E_{02} L_1} \cdot \sin \alpha_1$	$-P_2 \cdot \cos \alpha_1$
	f_3	$\frac{\rho_1^p A_1 E_{01}}{L_1} \cdot \frac{P_1 L_1 L_2}{\rho_1^p A_1 E_{01} L_2 + \rho_2^p A_2 E_{02} L_1} \cdot \sin \alpha_1$	$P_2 \cdot \cos \alpha_1$
2	f_2	$-\frac{\rho_2^p A_2 E_{02}}{L_2} \cdot \frac{P_1 L_1 L_2}{\rho_1^p A_1 E_{01} L_2 + \rho_2^p A_2 E_{02} L_1} \cdot \cos \alpha_2$	0
	f_3	$\frac{\rho_2^p A_2 E_{02}}{L_2} \cdot \frac{P_1 L_1 L_2}{\rho_1^p A_1 E_{01} L_2 + \rho_2^p A_2 E_{02} L_1} \cdot \cos \alpha_2$	0
3	f_3	$-\frac{\rho_3^p A_3 E_{03}}{L_3} \cdot \frac{P_1 L_1 L_2}{\rho_1^p A_1 E_{01} L_2 + \rho_2^p A_2 E_{02} L_1} \cdot \sin \alpha_3$	$P_2 \cdot \cos \alpha_3$
	f_4	$\frac{\rho_3^p A_3 E_{03}}{L_3} \cdot \frac{P_1 L_1 L_2}{\rho_1^p A_1 E_{01} L_2 + \rho_2^p A_2 E_{02} L_1} \cdot \sin \alpha_3$	$-P_2 \cdot \cos \alpha_3$

Para o 1º caso de estudo, como já referido anteriormente, o expoente p toma o valor zero ($p = 0$), devido ao facto de neste caso não ser considerado o método SIMP.

Substituindo pelos valores da tabela 4.2 e pelos dados fornecidos no início de cada subcapítulo de cada caso de estudo (subcapítulos (4.3) e (4.4)), chega-se aos valores dos esforços nos elementos e por fim procede-se ao cálculo das tensões nos elementos. Com a aplicação da equação (4.13) chega-se aos valores apresentados nas tabelas (4.3) e (4.5).

Anexo II

No âmbito desta dissertação de mestrado, de forma poder realizar o estudo de convergência de malha foi necessário gerar várias malhas de elementos finitos com diferentes discretizações. Para isso foi desenvolvido em Matlab um código que funciona em conjunto com um código em APDL que gera uma malha de elementos finitos. O código de Matlab, gera a malha através do *software* Ansys e converte-a para que o programa de otimização em FORTRAN consiga ler os ficheiros e reconhecer as malhas. Na figura A.2 estão representadas as duas formas de malha que o programa pode gerar. O cubo e a lâmina representam o domínio material e na mesma figura está representado um elemento finito na origem do referencial que é o primeiro elemento de cada malha, os restantes são dispostos como indicam as setas a vermelho.

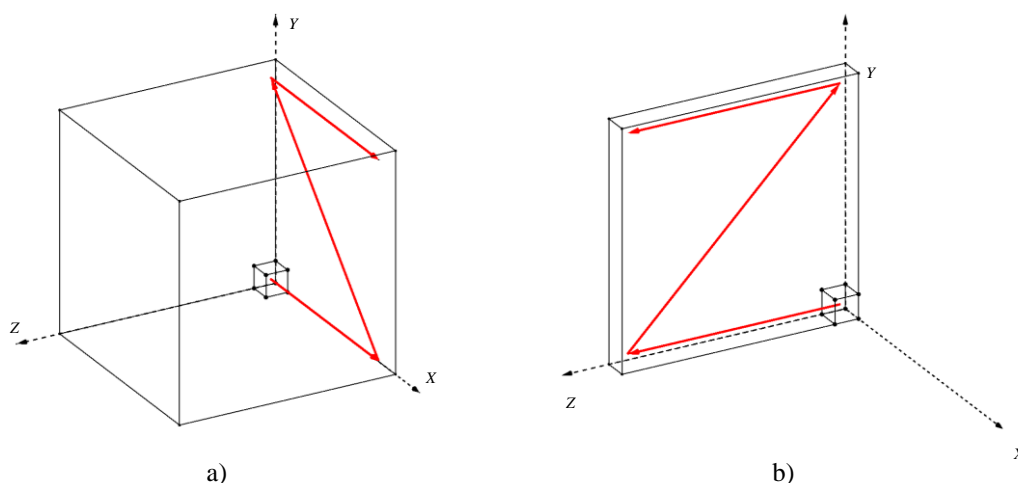


Figura A.2: Dois tipos de malha de elementos finitos gerados pelo programa. a) Malha de domínio cubico e b) Malha de domínio laminar.

O programa também está preparado para utilizar dois tipos de elementos finitos, o elemento de 8 nós e o elemento de ordem superior de 20 nós. O desafio encontrado na escrita deste programa foi o facto de a ordem da numeração dos nós de cada elemento ser diferente de um programa para o outro. Nas figuras A.3 e A.4 está representada a ordem de numeração dos nós para o primeiro elemento da malha para o *software* Ansys e para o programa em FORTRAN. O programa de geração de malha reordena o número dos nós de APDL para FORTRAN baseando-se na numeração dos nós no primeiro elemento.

O ficheiro da malha de elementos finitos resultante possui informações do número e coordenadas dos elementos, o número dos nós de cada elemento e as conectividades entre elementos. Possui também informação acerca de certos parâmetros utilizados pelo programa de otimização.

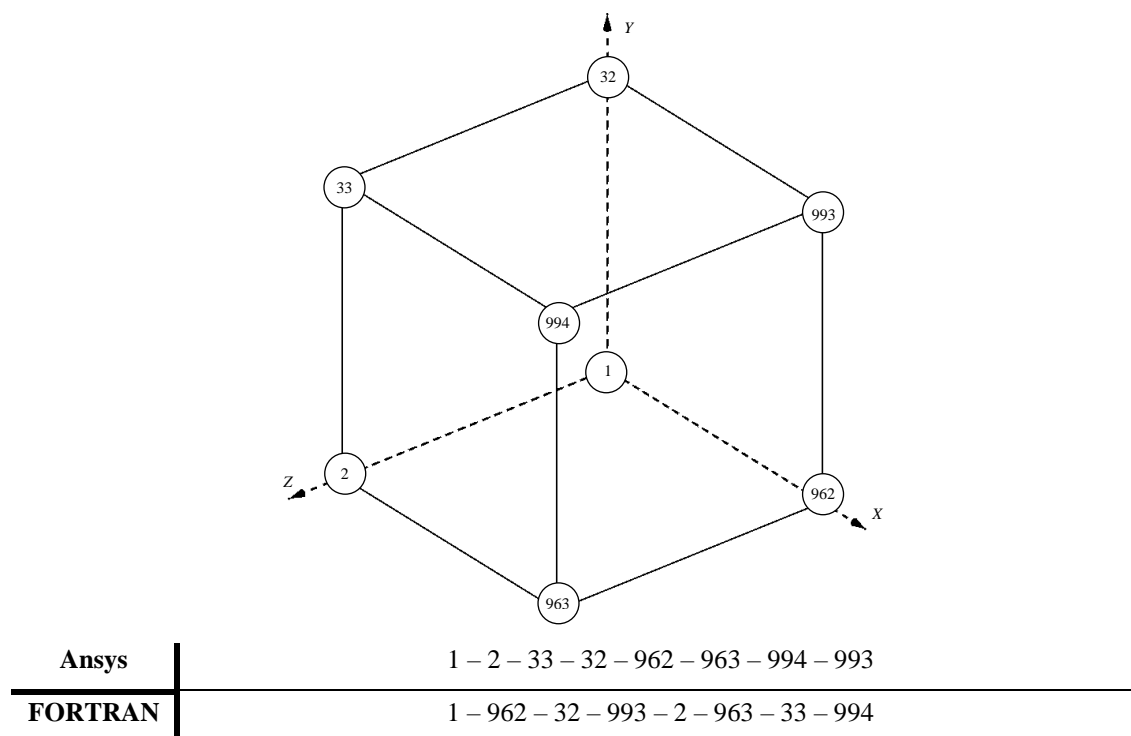


Figura A.3: Numeração dos nós no primeiro elemento de 8 nós da malha no *software* Ansys e no programa em FORTRAN.

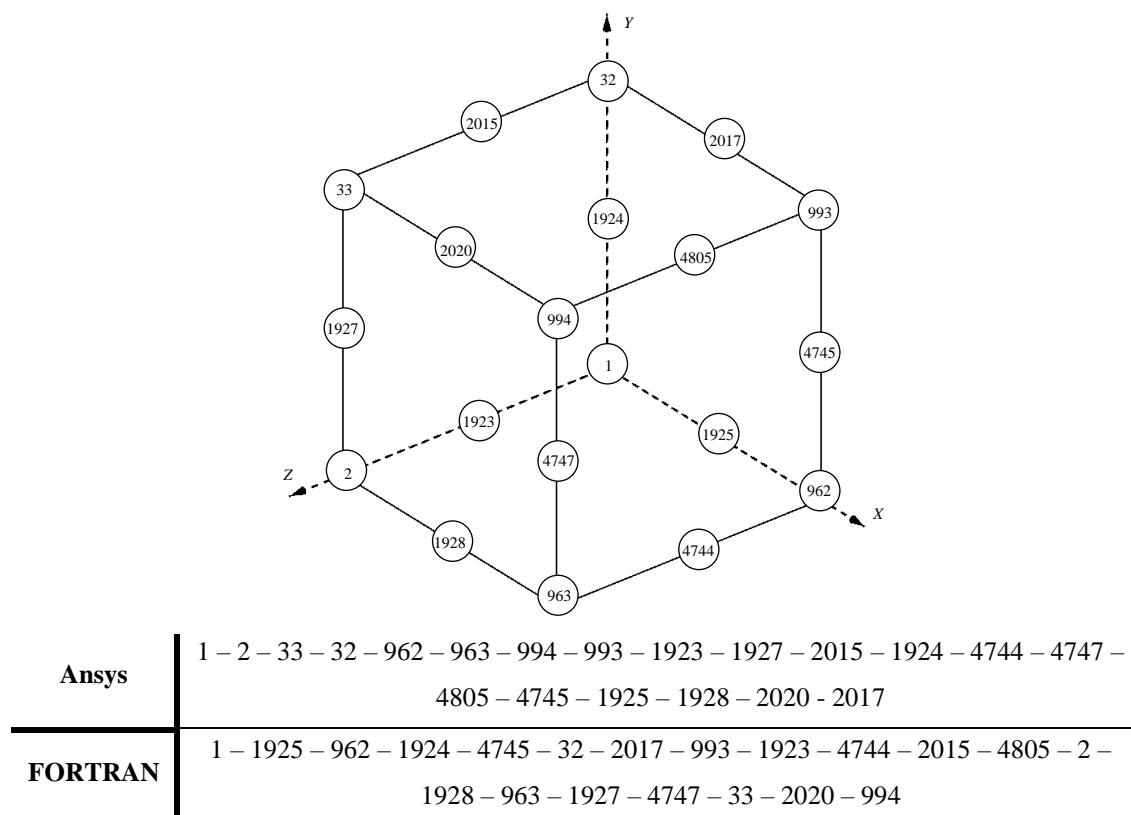


Figura A.4: Numeração dos nós do primeiro elemento de 20 nós da malha no *software* Ansys e no programa em FORTRAN.